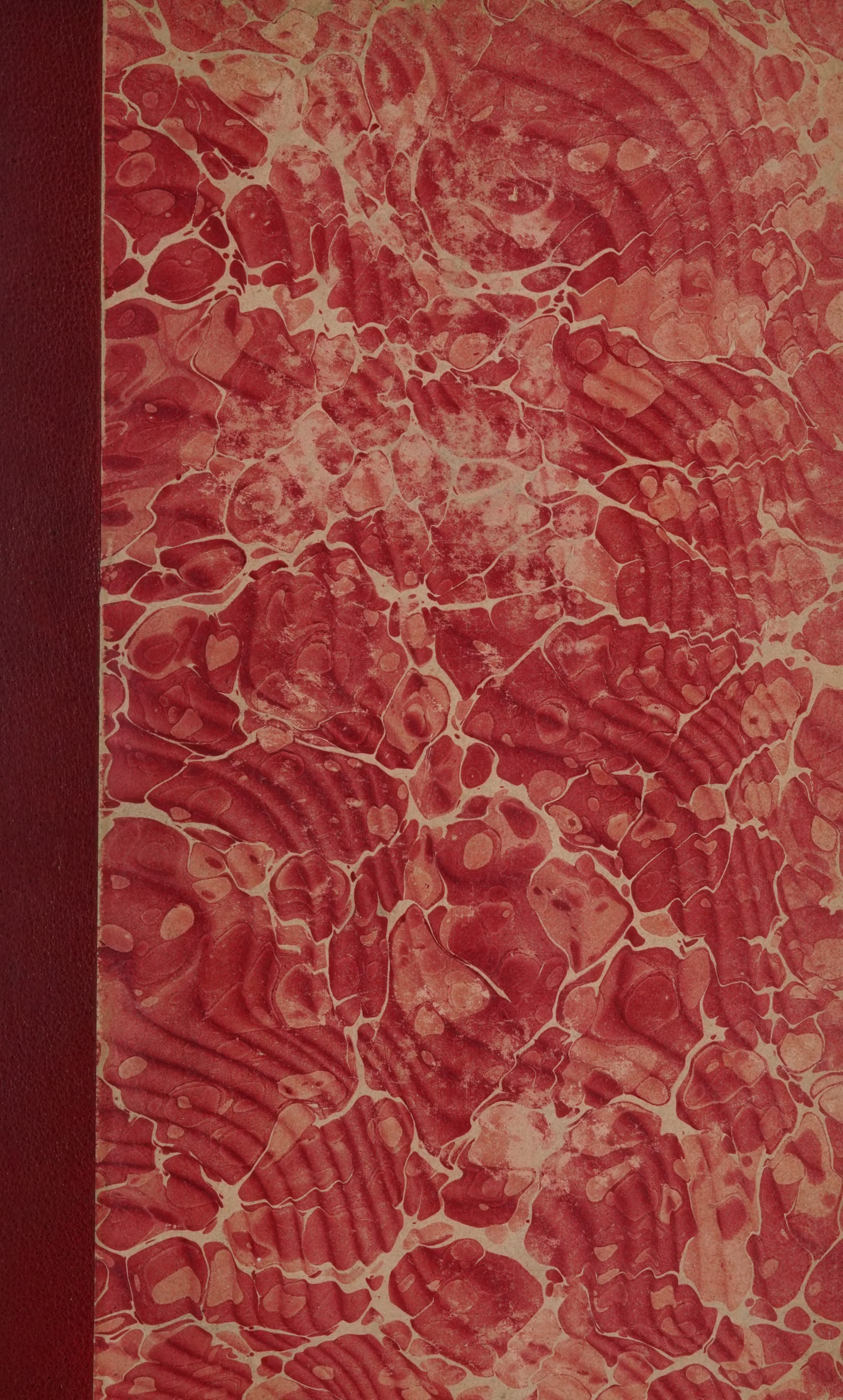
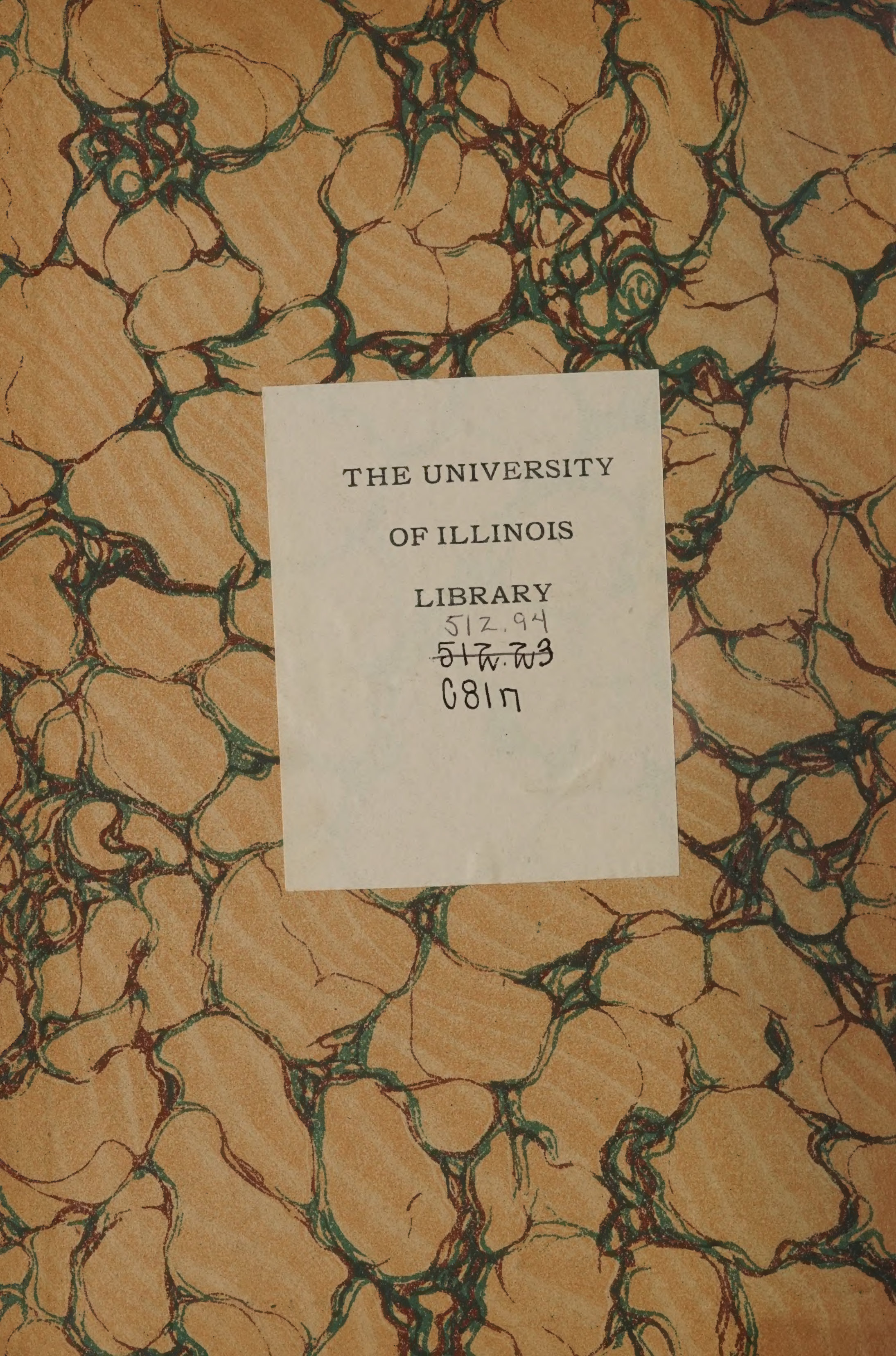
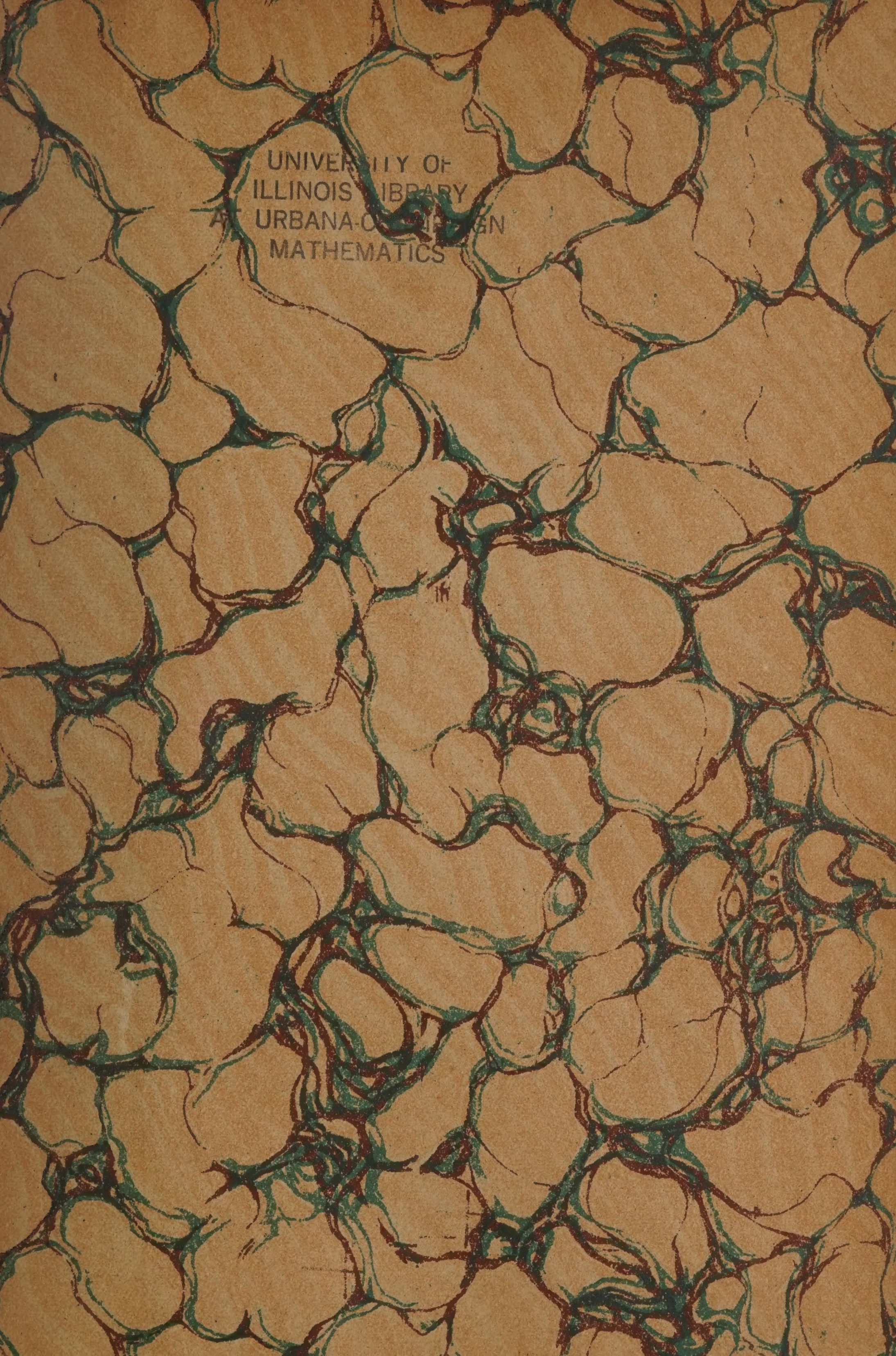
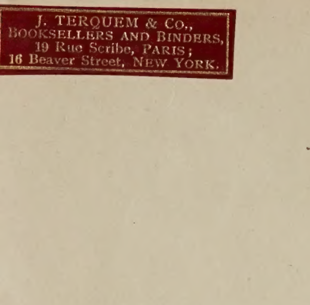





UNIVERSITY OF
ILLINOIS LIBRARY
AT URBANA-CHAMPAIGN
MATHEMATICS



NUEVOS METODOS

PARA

RESOLVER ECUACIONES NUMÉRICAS

NUEVOS MÉTODOS

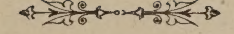
PARA

RESOLVER ECUACIONES NUMÉRICAS

POR

JOSÉ ISAAC DEL CORRAL

Ingeniero de Minas.



MADRID
LIBRERÍA EDITORIAL DE ADRIAN ROMO
5 — Alcalá — 5

1912

Madrid: Imprenta de Enrique Teodoro, Glorieta de Santa María de la Cabeza, 1.

INTRODUCCIÓN

En la presente obra tengo el honor de presentar al público el resultado de mis investigaciones sobre la Resolución de las ecuaciones numéricas realizadas durante el año de 1899, cuando me disponía para aprobar la asignatura de Álgebra Superior cursada en mi segundo año de preparatoria al ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Minas. Como de entonces acá he carecido de tiempo material para dedicarme á esta clase de estudios, muy poco he podido añadir á las notas consignadas en mis cuadernos de Febrero y Octubre de dicho año que aún obran en mi poder. Sírvame esta declaración de excusa por no haber terminado definitivamente de tratar algunos puntos susceptibles de ulteriores desarrollos, así como á la existencia de lagunas ú omisiones en el curso de la exposición, que el lector bondadoso me sabrá perdonar.

Conocida es la importancia que en la resolución numérica de las ecuaciones goza la *función derivada* de su primer miembro, con cuyo auxilio se llega á precisar los límites extremos que comprenden á las raíces reales, se determina el número exacto de éstas, y, finalmente, se las separa y calcula con la aproximación deseada. Otra ventaja que en sí lleva inherente la función derivada es la *extrema facilidad* con que se forma y deduce de la ecuación dada, la sencillez inolvidable de la ley constitutiva de cada uno de sus términos. No como recordatorio, sino para hacer resaltar lo que sigue y exponer con más claridad nuestras ideas, repetiremos, que si la ecuación numérica dada es

$$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x + a_m$$

la función derivada vale

$$f'(x) = m\, a_0\, x^{m-1} + (m-1)\, a_1\, x^{m-2} + \\ + (m-2)\, a_2\, x^{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-1}$$

En vez de operar con la derivada, yo utilizo la función

$$E_1 f(x) = a_1\, x^{m-1} + 2\, a_2\, x^{m-2} + 3\, a_3\, x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ + (m-1)\, a_{m-1}\, x + m\, a_m$$

de estructura tan simple y de formación tan fácil como aquélla; cuya regla, para escribirla, es *multiplicar cada uno de los términos de la ecuación por la diferencia que existe entre m y el grado propio á cada uno de ellos.* A esta nueva función hasta ahora por nadie considerada, al menos que yo sepa, la denomino *euleriana primera* de la ecuación, en memoria del inmortal matemático Leonardo Euler.

Pues bien, la tesis principal de mis deducciones es que en la teoría de la resolución numérica de las ecuaciones la euleriana de la función propuesta goza de tanta importancia, y con su empleo se resuelven absolutamente todos los problemas que con la derivada de la misma; es decir, que usando de la euleriana podemos calcular límites extremos para las raíces reales, precisar su número exacto, separarlas y determinar su valor con las cifras decimales que se quieran. Resulta así, que á un teorema ó método de investigación que utiliza la derivada de la función, corresponde otro teorema ó método semejante que emplea la euleriana de la misma. De aquí una *dualidad algebraica* notable – en esta rama especialísima del análisis—que creo ser el primero en señalar, y que trae á la memoria el recuerdo de lo que ocurre en Geometría con las proposiciones llamadas *correlativas,* que se refieren unas á puntos situados en línea recta, y las otras á rectas que concurren en un mismo punto.

Para poner de relieve la importancia de esta dualidad, expondremos á continuación, simultáneamente, las proposiciones debidas á diversos matemáticos ilustres que han estudiado, en el transcurso de varios siglos, el problema de resolver ecuaciones numéricas y las *correlativas* que yo deduzco, empleando la euleriana de la función allí donde ellos utilizan su derivada.

I.—Límites del valor y del número de las raíces.

Métodos antiguos.

Regla de Newton.—Se halla un límite superior de las raíces positivas de una ecuación $f(x) = 0$ determinando un número que haga positivas á $f(x)$ y á todas sus derivadas.

Teorema de Budan Fourier.—Sean dadas una ecuación $f(x) = 0$ de grado m, y la serie formada por su primer miembro y sus m derivadas sucesivas

$$f(x), f'(x) . f''(x) \ldots\ldots f^{m}(x)$$

Si se sustituye en lugar de x, en la serie indicada, dos cantidades reales cualesquiera p y $q > p$, y si se cuentan las variaciones presentadas por las dos series de resultados obtenidos, el número de variaciones perdidas pasando de la primera serie á la segunda, es un límite superior del número de las raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$, comprendidas entre las dos sustituciones p y q; y la diferencia entre este límite y el número de las raíces reales de que se trata, diferencia que puede ser nula, es siempre un número par.

Nuevos métodos.

Regla correlativa.—Se obtiene un límite inferior de las raíces positivas de una ecuación $f(x) = 0$ buscando un número que haga positivas á $f(x)$ y á todas sus eulerianas.

Teorema correlativo.—Siendo dada una ecuación numérica $f(x) = 0$ de grado m, si en la serie (1) formada por su primer miembro y sus m eulerianas sucesivas

$$f(x), E_1 f(x), E_2 f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$$

sustituímos en lugar de x una cantidad real p y anotamos solamente el signo de los resultados, obtendremos un cierto número de variaciones v_p; sustituyendo después en (1) otra cantidad $q > p$ por x, nos resultará otra cifra v_q de variaciones. La diferencia $v_p - v_q$ es un límite superior del exceso entre el número de raíces reales negativas y reales positivas que la ecuación $f(x) = 0$ posee entre ambas cantidades p y q; y la diferencia entre este límite y dicho exceso es siempre un número par, si bien se reduce á cero cuando todas las raíces de la ecuación dada $f(x) = 0$ son reales.

TEOREMA DE SYLVESTER.— Sean dadas una ecuación $f(x) = 0$ de grado m y la doble serie siguiente:

$$(1) \begin{cases} f & f_1 & f_2 \ldots\ldots f_m \\ F_0 & F_1 & F_2 \ldots\ldots F_m \end{cases}$$

definida por las relaciones

$$f_v(x) = \frac{(m - v)\,!}{m\,!} f^{(v)}(x)$$

$$F_v(x) = [f_v(x)]^2 - f_{v-1}(x) . f_{v+1}(x)$$

El número de raíces reales de la ecuación $f(x) = 0$ comprendidas entre las cantidades p y $q > p$ es igual ó inferior en un número par á la totalidad de variaciones-permanencias perdidas ó á la de permanencias-permanencias ganadas por la doble serie de funciones (1) cuando se sustituye en ella los números p y q en lugar de la variable x.

TEOREMA CORRELATIVO.— Sean dadas una ecuación $\varphi(x) = 0$ de grado m y la doble serie siguiente

$$(1) \begin{cases} \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m \\ \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_m \end{cases}$$

definida por las relaciones

$$\varphi_v(x) = \frac{(m - v)\,!}{m\,!} E_v \varphi(x)$$

$$\Phi_v(x) = [\varphi_v(x)]^2 - \varphi_{v-1}(x) . \varphi_{v+1}(x)$$

La diferencia entre el número de raíces reales negativas y reales positivas que la ecuación $f(x) = 0$ posee entre dos cantidades p y $q > p$ es igual ó inferior en un número par á la totalidad de variaciones-permanencias perdidas ó á la de permanencias-permanencias ganadas por la doble serie de funciones (1) cuando se sustituye en ella los números p y q en lugar de la variable x.

TEOREMA DE ROLLE.—Dos raíces reales consecutivas de una ecuación numérica $f(x) = 0$ comprenden siempre entre sí un número impar de raíces reales de la ecuación derivada $f'(x) = 0$, número impar que puede reducirse á la unidad.

TEOREMA CORRELATIVO.— Entre dos raíces reales consecutivas y del mismo signo de la ecuación $f(x) = 0$, existe siempre una ó un número impar de raíces reales de la ecuación $E_1 f(x) = 0$, obtenida igualando á cero la euleriana de $f(x)$.

II. — Número exacto de raíces reales de la ecuación.

Métodos antiguos.

Teorema de Sturm.—Si se aplica al primer miembro de una ecuación de coeficientes reales $f(x) = 0$ y á su derivada $f'(x)$ el procedimiento conocido para encontrar el máximo común divisor de las dos funciones, con la sola condición de cambiar de signo á los restos antes de pasar á ser divisores, hallaremos la serie siguiente de funciones

(1) $f(x), f'(x), V_2, V_3 \ldots\ldots V_m$

cuyos grados con relación á x van en escala decreciente.

Sustituyendo en la serie (1) la variable x por la cantidad real p, se anotará la serie de signos que dan los resultados y contaremos las variaciones que ésta presenta; cambiando luego x' por $q > p$ anotaremos también el número de variaciones que presenta la nueva serie de signos. La diferencia entre estos dos números de variaciones será precisamente igual al número exacto de raíces reales de la ecuación dada comprendidas entre p y q.

Teorema de Sylvester.—

Nuevos métodos.

Teorema correlativo.—Si se aplica al primer miembro de una ecuación de coeficientes reales $f(x) = 0$ y á su euleriana $E_1 f(x)$ el procedimiento conocido para encontrar el máximo común divisor de dichas dos funciones, con la sola condición de cambiar de signo á los restos antes de pasar á ser divisores, hallaremos la serie siguiente de funciones

(1) $f(x), E_1 f(x), W_2, W_3 \ldots\ldots W_m$

cuyos grados con relación á x van en escala decreciente.

Sustituyendo en la serie (1) la variable x por la cantidad real p se anotará la serie de signos que dan los resultados y contaremos las variaciones que ésta presenta; cambiando luego x por $q > p$ anotaremos también el número de variaciones que presenta la nueva serie de signos. La diferencia entre el primer número de variaciones y el segundo es exactamente igual al exceso del número de raíces reales negativas sobre el número de las positivas que la ecuación dada tiene comprendidas entre p y q.

Teorema correlativo.—

Designando por $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ las m raíces de la ecuación numérica $f(x) = 0$, las diversas funciones de la serie anterior (1) de Sturm podrán expresarse del siguiente modo cuando el coeficiente de x^m en $f(x)$ sea igual á 1:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_m)$$

$$f'(x) = \Sigma (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots (x - x_m)$$

$$V_2 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \Sigma (x_1 - x_2)^2 \cdot (x - x_3) \cdot \cdot (x - x_4) \ldots\ldots (x - x_m)$$

$$V_3 = \frac{1}{\lambda_3} \cdot \Sigma (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x - x_4) \ldots (x - x_m)$$

. . . .

. . . .

$$V_m = \frac{1}{\lambda_m} \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \ldots \ldots (x_{m-1} - x_m)^2$$

estando las cantidades

$$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots\ldots \lambda_m$$

determinadas por las fórmulas

$$(2) \begin{cases} \lambda_2 = p_1^2 \\ \lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ \lambda_4 = \left(\frac{p_1 \cdot p_3}{p_2}\right)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Designando por $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ las m raíces de la ecuación numérica $f(x) = 0$, las diversas funciones de la serie (1) del teorema anterior, podrán expresarse del siguiente modo cuando el coeficiente de x^m en $f(x)$ sea igual á 1:

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots\ldots (x - x_m)$$

$$E_1 f(x) = \Sigma (-1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots \ldots (x - x_m) \cdot x_1$$

$$W_2 = \frac{1}{\lambda_2} \cdot \Sigma (-1)^2 (x_1 - x_2)^2 \cdot (x - x_3) \cdot (x - x_4) \ldots (x - x_m) \cdot x_1 \cdot x_2$$

$$W_3 = \frac{1}{\lambda_3} \cdot \Sigma (-1)^3 \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot (x - x_4) \ldots \ldots (x - x_m) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$$

. . . .

. . . .

$$W_m = \frac{1}{\lambda_m} \cdot (-1)^m \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_{m-1} - x_m)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_m$$

estando las cantidades

$$\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots\ldots \lambda_m$$

determinadas por las fórmulas

$$(2) \begin{cases} \lambda_2 = p_1^2 \\ \lambda_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ \lambda_4 = \left(\frac{p_1 \cdot p_3}{p_2}\right)^2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$
(3)\begin{cases}
p_1 = m \\
p_2 = \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 \\
p_3 = \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 . \\
\qquad . (x_2 - x_3)^2 \\
p_4 = \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots \\
\qquad \ldots (x_3 - x_4)^2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_m = (x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots \\
\qquad \ldots (x_{m-1} - x_m)^2
\end{cases}
$$

en donde cada Σ representa una función simétrica de las raíces.

Teorema de Hermite.—Sea dada la ecuación $F(z) = 0$ de grado m con coeficientes reales y raíces desiguales $x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_m$. Formemos la función real homogénea

$$
\begin{aligned}
f = {} & \frac{1}{x_1 - t}\,(z_0 + x_1 . z_1 + x_1^2 z_2 \\
& . + x_1^3 . z_3 + \ldots + x_1^{m-1} . z_{m-1})^2 + \\
+ {} & \frac{1}{x_2 - t}\,(z_0 + x_2 . z_1 + x_2^2 z_2 \\
& . + x_2^3 . z_3 + \ldots + x_2^{m-1} . z_{m-1})^2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {} & \frac{1}{x_m - t}\,(z_0 + x_m . z_1 + x_m^2 z_2 \\
& + x_m^3 . z_3 + \ldots + x_m^{m-1} . z_{m-1})^2
\end{aligned}
$$

de m variables $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{m-1}$ y con una indeterminada real

$$
(3)\begin{cases}
p_1 = \Sigma\,(-1) . x_1 = a_1 \\
p_2 = \Sigma(-1)^2 . (x_1 - x_2)^2 . x_1 . x_2 \\
p_3 = \Sigma\,(-1)^3 . (x_1 - x_2)^2 . \\
\qquad . (x_1 - x_3)^2 . (x_2 - x_3)^2 . \\
\qquad . x_1 . x_2 . x_3 \\
p_4 = \Sigma\,(-1)^4\ (x_1 - x_2)^2 . \\
\qquad . (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_3 - x_4)^2 . \\
\qquad . x_1 . x_2 . x_3 . x_4 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_m = (-1)^m . (x_1 - x_2)^2 . \\
\qquad . (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{m-1} - x_m)^2 . \\
\qquad . x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_m
\end{cases}
$$

en donde cada Σ representa una función simétrica de las raíces.

Teorema correlativo.—Sea dada la ecuación $F(z) = 0$ de grado m con coeficientes reales y raíces desiguales $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$. Formemos la función real homogénea

$$
\begin{aligned}
g = {} & \frac{x_1}{x_1 - t}\,(z_0 + x_1 . z_1 + x_1^2 z_2 \\
& + x_1^3 . z_3 + \ldots + x_1^{m-1} . z_{m-1})^2 \\
+ {} & \frac{x_2}{x_2 - t} . (z_0 + x_2 . z_1 + x_2^2 z_2 \\
& + x_2^3 . z_3 + \ldots + x_2^{m-1} . z_{m-1})^2 + \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+ {} & \frac{x_m}{x_m - t} . (z_0 + x_m . z_1 + \\
& + x_m^2 . z_2 + x_m^3 . z_3 + \ldots\ldots + \\
& + x_m^{m-1}\ z_{m-1})^2
\end{aligned}
$$

de m variables $z_0, z_1, z_2 \ldots z_{m-1}$ y con una indeterminada real t.

t. Cualquiera que sea el valor que se asigne á t será siempre posible, por medio de una sustitución real, reducir la función f á una suma de cuadrados de funciones lineales reales.

Si p y $q > p$ son dos números arbitrarios y en la función f sustituímos primero en vez de t la cantidad p y luego hacemos $t = q$; la diferencia entre el número de cuadrados positivos que sucesivamente presenta f para $t = p$ y cuando $t = q$ es igual al número exacto de raíces reales de $F(z) = 0$ comprendidas entre los límites p y q.

Cualquiera que sea el valor que se asigne á t será siempre posible, por medio de una sustitución real, reducir la función g á una suma de cuadrados de funciones lineales reales.

Si p y $q > p$ son dos números arbitrarios y en la función g sustituímos primero en vez de t la cantidad p y luego hacemos $t = q$; la diferencia entre el número de cuadrados negativos que sucesivamente presenta g para $t = p$ y cuando $t = q$ es igual al exceso del número de raíces reales negativas sobre el de las positivas que la ecuación $F(z) = 0$ tiene comprendidas entre los límites p y q.

MÉTODO DE HURWITZ.—Sean dadas la ecuación $f(z) = 0$ de grado m con raíces desiguales $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ y otra función $\Phi(z)$ cualquiera de grado indeterminado, pero entera con relación á z.

Calculemos la forma cuadrática

$$H = \sum_{0 \,.\, m-1}^{i \,.\, k} c_{i+k} \cdot t_i \cdot t_k = \sum_{1 \,.\, m}^{\mu} \frac{\Phi(x_\mu) \cdot \theta^2(x_\mu)}{f'(x_\mu)}$$

de m variables independientes $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots t_{m-1}$ definidas por la relación

$$\theta(z) = t_0 + t_1 \cdot z + t_2 \cdot z^2 + \ldots\ldots + t_{m-1} \cdot z^{m-1}$$

MÉTODO CORRELATIVO.—Sean dadas la ecuación $f(z) = 0$ de grado m con raíces desiguales $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ y otra función $\Phi(z)$ arbitraria, de grado indeterminado pero entera con relación á z.

Calculemos la forma cuadrática

$$C = \sum_{0 \,.\, m-1}^{i \,.\, k} b_{i+k} \cdot t_i \cdot t_k = \sum_{1 \,.\, m}^{\mu} \frac{\Phi(x_\mu) \cdot \theta_1^{\,2}(x_\mu)}{E_1 f(x_\mu)}$$

de m variables independientes $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots t_{m-1}$ definidas por la relación

$$\theta_1(z) = t_0 + t_1 z^{-1} + t_2 \cdot z_2^{-2} + \ldots\ldots + t_{m-1} \cdot z^{-m+1}$$

Siendo p un número real cualquiera distinto á las raíces de $f(z) = 0$, cuando se haga

$$\Phi(z) = (z - p) \cdot f'(z)$$

la forma cuadrática H_p tendrá π cuadrados positivos y ν cuadrados negativos, cuya diferencia vale

$$N_p = \pi - \nu .$$

Calculando después la cuadrática H para

$$\Phi(z) = (z - q) \cdot f'(z)$$

en donde q es un número arbitrario, hallaremos del mismo modo

$$N_q = \pi' - \nu'$$

significando π' el número de cuadrados positivos y ν' el de negativos que posee la nueva cuadrática H_q.

La diferencia $N_p - N_q$ es exactamente igual al número de raíces reales de la ecuación $f(z) = 0$ que se encuentran comprendidas entre los límites p y q.

Siendo p un número real cualquiera distinto á las raíces de $f(z) = 0$, cuando se haga

$$\Phi(z) = (z - p) \cdot E_1 f(z)$$

la forma cuadrática C_p tendrá π_1 cuadrados positivos y ν_1 cuadrados negativos, cuya diferencia vale

$$N_p = \pi_1 - \nu_1$$

Calculando después la cuadrática C para

$$\Phi(z) = (z - q) \cdot E_1 f(z)$$

en donde q es un número arbitrario, hallaremos del mismo modo

$$N_q = \pi'_1 - \nu'_1$$

significando π'_1 el número de cuadrados positivos y ν'_1 el de negativos que posee la nueva cuadrática C_q

La diferencia $N_p - N_q$ es exactamente igual al número de raíces reales de la ecuación $f(z) = 0$ que se encuentran comprendidas entre los límites p y q.

III.—Separación de las raíces reales de la ecuación.

Métodos antiguos.

Teorema de Fourier.—Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene sólo dos raíces reales comprendidas

Nuevos métodos.

Teorema correlativo.—Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene sólo dos raíces reales comprendidas

entre los valores α y $\beta > \alpha$, y además la ecuación $f''(x) = 0$ no tiene raíz alguna entre dichos límites, se verificará la desigualdad

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} < \beta - \alpha$$

Método de Fourier, fundado en el teorema de Budan-Fourier (ya expuesto) y en el teorema anterior.

Método de Sturm, fundado en el teorema del mismo autor que determina el número exacto de raíces reales de la ecuación comprendidas entre dos límites arbitrarios p y q.

entre los valores α y $\beta > \alpha$ del mismo signo, y además la ecuación $E_2 f(x) = 0$ no tiene raíz alguna entre dichos límites, se verificará la desigualdad

$$\frac{\alpha . E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} < \frac{\beta . E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)}$$

Método correlativo, fundado en el teorema anterior y en nuestro teorema correlativo al de Budan-Fourier (ya expuesto).

Método correlativo, fundado en nuestro teorema correlativo al de Sturm que determina el número exacto de raíces reales de la ecuación comprendidas entre dos límites arbitrarios p y q.

IV.—Cálculo de las raíces incomensurables.

Métodos antiguos.

Método de aproximación de Newton.—Si los dos números p y $q > p$ del mismo signo comprenden una sola raíz real (x_1) de la ecuación $f(x) = 0$, y la diferencia $(q - p)$ es bastante pequeña para que en el intervalo (p, q) las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$ no cambien de signo, se obtendrá un valor más aproximado (α) de la raíz considerada, y en el mismo sentido

Nuevos métodos.

Método de aproximación correlativo.—Si los dos números p y $q > p$ del mismo signo comprenden una sola raíz real (x_1) de la ecuación $f(x) = 0$, y la diferencia $(q - p)$ es bastante pequeña para que en el intervalo (p, q) las funciones $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$ no cambien de signo, se obtendrá un valor más aproximado (α_1) de la raíz considerada y en el mismo sen-

que el límite empleado, cambiando á x en la expresión

$$(1) \qquad x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

por aquel de los dos números p ó q, que sustituído en lugar de x haga á $f(x)$ y $f''(x)$ del mismo signo.

Poniendo en la expresión (1) en lugar de x el valor (α) así calculado, se obtendrá un segundo valor (α') aún más aproximado á la raíz (x_1) y siempre en el mismo sentido. Este nuevo valor (α') permite encontrar un tercero (α'') todavía más aproximado, etc. Continuando de este modo se llegará á calcular la raíz (x_1) con el número de cifras decimales que se quieran.

Perfeccionamiento del método anterior.—Sean α y $\beta > \alpha$ dos números próximos que comprenden una sola raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$ y entre los cuales no se anulan las funciones $f'(x)$ y $f''(x)$. Representemos por $2M$ un número que tenga el signo de la relación

$$+ \frac{f''(x)}{f'(x)}$$

y cuyo módulo sea igual ó superior al mayor de los módulos que toma dicha fracción cuan-

tido que el límite empleado, cambiando á x en la expresión

$$(1) \qquad \frac{x \, . \, E_1 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

por aquel de los dos números p ó q, que sustituído en lugar de x haga á $f(x)$ y $E_2 f(x)$ del mismo signo.

Poniendo en la expresión (1) en lugar de x el valor (α_1) así calculado, se obtendrá un segundo valor (α_1') aún más aproximado á la raíz (x_1) y siempre en el mismo sentido. Este nuevo valor (α'_1) permite encontrar un tercero (α''_1) todavía más aproximado, etc. Continuando de este modo se llegará á calcular la raíz (x_1) con el número de cifras decimales que se quieran.

Perfeccionamiento del método anterior.—Sean α y $\beta > \alpha$ dos números de signos positivos que comprenden una sola raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$ y entre los cuales no se anulan las funciones $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$. Representemos por $2 \, . \, N$ un número que tenga el signo de la relación

$$\frac{x^2 \, . \, E_2 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

y cuyo módulo sea igual ó superior al mayor de los módulos que toma dicha misma fracción

do x varía de α á β. Si se designa por a aquel de los dos límites α ó β para el cual las funciones $f(x)$ y $f''(x)$ tienen el mismo signo, y por b aquel que da signos contrarios á dichas mismas funciones, tendremos que la raíz x_0 se encuentra comprendida entre estos dos nuevos límites.

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} - M(b-a)^2$$

Cuando entre los límites α y β cada una de las funciones $f''(x)$ y $f'(x)$ varía en el mismo sentido, se podrá formar el número M dividiendo aquella de las dos cantidades

$$\frac{1}{2} \cdot f''(\alpha) \qquad \frac{1}{2} \cdot f''(\beta)$$

que tenga el mayor valor absoluto, por aquella de las dos

$$f'(\alpha) \qquad f'(\beta)$$

que sea de más pequeño valor absoluto.

Los números α y β pueden ser ambos positivos ó negati-

cuando x varía entre α y β. Si se designa por p aquel de los dos límites α ó β para el cual las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tienen el mismo signo, y por q aquel que da signos contrarios á dichas mismas funciones, tendremos que la raíz x_0 se encuentra comprendida entre estos dos nuevos límites.

$$p_1 = \frac{p \cdot E_1 f(p)}{E_1 f(p) - f(p)}$$

$$q_1 = \frac{p \cdot E_1 f(p)}{E_1 f(p) - f(p)} + \\ + \frac{M}{\alpha}\left(\frac{q}{p} - 1\right)^2$$

Cuando entre los límites α y β cada una de las funciones $x^2 \cdot E_2 f(x)$ y $E_1 f(x) - f(x)$ varía en el mismo sentido, se podrá formar el número N dividiendo aquella de las dos cantidades

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot E_2 f(\alpha) \qquad \frac{1}{2} \cdot \beta^2 \cdot E_2 f(\beta)$$

que tenga el mayor valor absoluto, por aquella de las dos

$$E_1 f(\alpha) - f(\alpha) \qquad E_1 f(\beta) - f(\beta)$$

que sea de más pequeño valor absoluto.

Cuando $\alpha < \beta < 0$, aplicaremos las fórmulas

vos, pues los resultados anteriores son inalterables.

$$p_1 = \frac{p \cdot E_1 f(p)}{E_1 f(p) - f(p)}$$

$$q_1 = \frac{p \cdot E_1 f(p)}{E_1 f(p) - f(p)} + \\ + \frac{M}{\beta} \left(\frac{q}{p} - 1 \right)^2$$

teniendo p y q la misma significación que antes.

Complemento al método de Lagrange.—Cuando por aplicación continuada del método de Lagrange se llega á la ecuación transformada en x_n

$$A_0^{(n)} x^m + A_1^{(n)} \cdot x^{m-1} + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1}^{(n)} \cdot x + A_m^{(n)} = 0$$

y á una última reducida

$$\frac{P_n}{Q_n}$$

tal que se verifique la desigualdad

$$Q_n^2 > \pm K \cdot M$$

en donde

$$M = \frac{f''(x)}{2 \cdot f'(x)}$$

y K un número suficientemente grande, se podrá entonces adoptar para x_n el valor

$$(1) \quad \xi_n = (m-1) \cdot \frac{Q_{n-1}}{Q_n} - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{n}}$$

La raíz buscada valdrá aproximadamente

Método correlativo.—Cuando por aplicación continuada del método de Lagrange se llega á la ecuación transformada en x_n

$$A_0^{(n)} \cdot x^m + A_1^{(n)} \cdot x^{m-1} + \ldots\ldots + \\ + A_{m-1}^{(n)} \cdot x + A_m^{(n)} = 0$$

y á una última reducida

$$\frac{P_n}{Q_n}$$

tal que se verifique la desigualdad

$$P_n \cdot Q_n > \pm K \cdot N$$

en donde

$$N = \frac{E_2 f(x)}{2 \cdot E_1 f(x)}$$

y K un número suficientemente grande, se podrá entonces adoptar para x_n el valor

$$\eta_n = (m-1) \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{(n)}} \quad (1)$$

La raíz buscada valdrá apromadamente

$$\frac{P_n \cdot \xi_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1}}$$

con un error menor que

$$\frac{-M}{a_n^2 \cdot Q_n^4}$$

siendo a_n el cociente incompleto correspondiente á x_n ó sea el número entero contenido en ξ_n.

Si el desarrollo en fracción continua es bastante avanzado, la expresión (1) no solamente dará á conocer a_n, sino que desarrollando ξ_n en fracción continua podremos obtener otros cocientes incompletos de la raíz buscada, siempre que se verifiquen determinadas condiciones.

$$\frac{P_n \cdot \eta_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot \eta_n + Q_{n-1}}$$

con un error menor que

$$\frac{N}{P_n \cdot Q_n^3 \cdot a_n^2}$$

siendo a_n el cociente incompleto correspondiente á x_n ó sea el número entero contenido en η_n.

Si el desarrollo en fracción continua es bastante avanzado, la expresión (1) no solamente dará á conocer a_n, sino que desarrollando η_n en fracción continua podremos obtener otros cocientes incompletos de la raíz buscada, siempre que se verifiquen determinadas condiciones.

La anterior idea de dualidad puede también aplicarse en la investigación de las raíces complejas de una función real, si bien por otro procedimiento. Veamos cómo.

Siendo

$$f(z) = 0$$

la función real de variable imaginaria

$$z = x + \sqrt{-1} \cdot y$$

sabemos que realizando las operaciones indicadas y separando la parte real de la imaginaria, se podrá escribir

$$f(z) = P + \sqrt{-1} \cdot Q$$

Estudiando Cauchy la relación $\frac{P}{Q}$ llegó á deducir el número de raíces complejas de la ecuación dada comprendidas en el interior de un contorno cualquiera. La dualidad se establece aquí del siguiente modo. Observemos que

$$Q = y \quad N$$

siempre que todos los coeficientes de $f(z)$ sean cantidades reales. Considerando la fracción $\frac{P}{N}$ en lugar de la $\frac{P}{Q}$ de Cauchy, he llegado á establecer una proposición correlativa á la de este sabio matemático, en virtud de la cual se puede calcular el número exacto de raíces complejas con parte imaginaria positiva, complejas de coeficiente imaginario negativo y raíces reales que la ecuación $f(z) = 0$ tiene comprendidas en el interior de un contorno cerrado cualquiera. Es decir, que nuestro teorema es, por lo menos, de tan fácil aplicación como el de Cauchy, así como de igual importancia teórica y práctica. He aquí dichas dos proposiciones:

Teorema de Cauchy.—Sean dadas, una variable imaginaria $z = x + \sqrt{-1} \cdot y$, así como la función real $f(z) = P + Q \cdot \sqrt{-1}$ de dicha variable en donde P y Q son funciones enteras y reales de x é y. Tracemos un contorno cerrado cualquiera que no pase por ninguno de los puntos raíces de $f(z) = 0$ y en el cual la relación $\frac{P}{Q}$ tendrá un valor determinado para cada uno de sus puntos. Recorriendo totalmente el contorno hasta volver al punto de partida, dicha fracción $\frac{P}{Q}$ tomará diversos valores, pasando por cero cada vez que P se anula y por infinito cuando se tenga $Q = 0$. Supongamos sea: K el número de veces que la relación $\frac{P}{Q}$ anulándose con cambio de signo pase de positiva á negativa;

Teorema correlativo.—Sean dadas, una variable imaginaria $z = x + y \cdot \sqrt{-1}$, así como la función real $f(z) = P + y \cdot N \cdot \sqrt{-1}$ de dicha variable en donde P y N son funciones enteras y reales de x é y. Tracemos un contorno cerrado cualquiera que no pase por ninguno de los puntos raíces de $f(z) = 0$ y en el cual la relación $\frac{P}{N}$ tendrá un valor determinado para cada uno de sus puntos. Recorriendo totalmente el contorno hasta volver al punto de partida, dicha fracción $\frac{P}{N}$ tomará diversos valores, pasando por cero cada vez que P se anula y por infinito cuando se tenga $N = 0$. Supongamos sea: K_1 el número de veces que la relación $\frac{P}{N}$ anulándose con cambio de signo pase de positi-

K' el número de veces que esta misma fracción al anularse y cambiar de signo pase de negativa á positiva.

La diferencia $\Delta = K - K'$ será siempre igual al doble 2μ del número μ de puntos raíces de la ecuación $f(z) = 0$ que se encuentran comprendidas en el interior del contorno considerado. Es indiferente que las μ raíces sean sencillas ó múltiples.

va á negativa; K'_1 el número de veces que esta misma fracción al anularse y cambiar de signo pase de negativa á positiva. La diferencia $\nabla = K_1 - K'_1$ será siempre igual al doble $2 \cdot (\mu_2 - \mu_1)$ del número μ_2 de raíces imaginarias con parte imaginaria positiva comprendidas dentro del contorno, menos el número μ_1 de raíces complejas incluídas también en el contorno, pero de coeficiente imaginario negativo. Es indiferente que las μ_2 raíces situadas en la parte superior del plano ó las μ_1 colocadas en la región inferior sean sencillas ó múltiples.

Determinación y separación de las raíces complejas de una función real.

Método fundado en el teorema anterior de Cauchy

Método correlativo fundado en nuestro teorema anterior

Los numerosos ejemplos que se intercalan al final de cada nuevo teorema ó método permiten justipreciar la originalidad de los mismos, así como la manera de aplicarlos.

El problema de encontrar el número exacto de las raíces distintas de una ecuación, determinando cuántas son reales positivas, cuántas reales negativas y la totalidad de pares imaginarios conjugados, puede ser resuelto de un modo especial á virtud de una nueva función que he establecido desarrollando las anteriores ideas de dualidad. Expondré brevemente el concepto fundamental y propiedad característica que conducen al resultado descrito.

Hace largos años es conocida en Algebra la función

$$S(y^2)$$

en donde

$$y = t_{n-1} \cdot f_0(x) + t_{n-2} \cdot f_1(x) + \ldots \ldots + t_0 \cdot f_{n-1}(x)$$

y S significa la suma de los diversos valores del cuadrado y^2 cuando en lugar de x se sustituyen sucesivamente todas las raíces de la ecuación dada $f(x) = 0$. El primero qüe empleó en sus investigaciones á esta función, fué Bezout; y de aquí el nombre de *bezoutiana* que Sylvester le asignó y que ha sido universalmente aceptado.

Por analogía con otros teoremas anteriores, llegué á considerar la función

$$S(x \cdot y^2)$$

cuyo cálculo práctico se hace con tanta facilidad como en la bezoutiana, siendo además de tan sencilla estructura como ésta. Fundado en lo que creo una justa compensación, he dado á esta nueva función el nombre de *sylvesteriana*, en recuerdo del brillante algebrista ya citado.

La *bezoutiana* y la *sylvesteriana* son funciones correlativas, caracterizadas respectivamente por las propiedades siguientes:

La bezoutiana de un función $f(x)$ siendo descompuesta en una suma de π cuadrados positivos y ν cuadrados negativos de funciones lineales y reales que no pueden ser reducidos á un número menor, se tendrá que el númeio de raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$ vale $\pi + \nu$; el número de pares de raíces imaginarias conjugadas es ν; y el de raíces reales diferentes es $\pi - \nu$.

La sylvesteriana de una función siendo descompuesta en una suma de α cuadrados positivos y β cuadrados negativos de funciones lineales y reales que no pueden ser reducidos á un número menor, se tendrá que el número de raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$ vale $\alpha + \beta$; mientras que la diferencia entre el número de raíces reales positivas y el de reales negativas será igual á $\alpha - \beta$.

Utilizando estos dos teoremas se resuelve inmediatamente el problema enunciado.

Fué siempre mi propósito escribir una obra didáctica sobre Resolución de ecuaciones numéricas donde metódicamente se expusieran los teoremas y procedimientos conocidos, á la par que se insertasen los deducidos con el uso de la euleriana y demás funciones resultantes de aplicar mis ideas de dualidad en esta Teoría. Así habría la ventaja de tener reunidos en un mismo cuerpo doctrinal todos los anteriores conceptos, que se irían exponiendo simultáneamente, con gran ventaja para el lector y ganando mucho la claridad y armonía de esta parte del Álgebra. Pero absorbido mi tiempo con el ejercicio material de mi profesión, me he visto obligado á renunciar por completo á tal empresa, limitándome á la breve exposición que sigue y dejando para otras plumas, más afortunadas y meritorias que la mía, la realización de dicho trabajo. Á esta misma causa obedece la circunstancia de ser incompletas algunas de mis demostraciones y la necesidad en que se encontrará el lector, no muy versado en estas materias, de acudir á las citas que oportunamente se insertan, para darse exacta cuenta y comprender las proposiciones que utilizo en muchos de mis razonamientos.

Tal deficiencia no me ha sido dable subsanar, por cuanto las digresiones que hubiese tenido necesidad de introducir, son algunas de gran extensión.

Santander 14 de Diciembre de 1910.

NUEVOS MÉTODOS PARA RESOLVER ECUACIONES NUMÉRICAS

CAPÍTULO PRIMERO

Raíces complejas de una función real.

§ 1.—Raíces limitadas en un contorno cerrado.

Una *función entera* de la variable real ó imaginaria z es un polinomio como

$$f(z) = a_0 \,.\, z^m + a_1 \,.\, z^{m-1} + a_2 \,.\, z^{m-2} + \ldots \quad + a_{m-1} \,.\, z + a_m$$

donde cada término es el producto de una potencia entera de z por una constante real ó imaginaria. Cuando todos los coeficientes de la función entera son *reales*, se tiene entonces lo que se llama una *función real.*

El grado de la función es el mayor exponente que en la misma tiene la variable z. Si el polinomio está ordenado con relación á las potencias decrecientes de z, el grado m del primer término es entonces el grado de la función.

La variable imaginaria z es de la forma

$$z = x + \sqrt{-1} \,.\, y \quad = x + i \,.\, y$$

y puede ser representada geométricamente, con relación á dos ejes cartesianos, por un punto G de abcisa x y ordenada y.

Dada la función real $f(z)$ de variable imaginaria z, la conocida fórmula de Taylor nos permitirá establecer

$$f(z) = f(x + i.\, y) = f(x) + i.\, y.\, f'(x) - \frac{y^2}{1.2} \cdot f''(x) - \frac{i.\, y^3}{1.2\,3} \cdot f'''(x) + $$
$$+ \frac{y^4}{1.2.3.4} f^{\mathrm{IV}}(x) + \ldots$$

Separando los términos reales de los imaginarios, tendremos

$$f(z) = \left[f(x) - \frac{y^2}{1.2} \cdot f''(x) + \frac{y^4}{1.2\,3\,4} \cdot f^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots \right] + i.\, y.\, \left[f'(x) - \right.$$
$$\left. - \frac{y^2}{1.2.3} \cdot f'''(x) + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} \cdot f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots \right]$$

y llamando

$$M = f(x) - f''(x) \cdot \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} \cdot f^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots$$

$$N = f'(x) - \frac{y^2}{1.2.3} \cdot f'''(x) + \frac{y^4}{1.2.3.4.5} \cdot f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots$$

será entonces

$$f(z) = M + i.\, y.\, N$$

donde M y N representan funciones enteras y reales de las variables x é y. Como la coordenada y es distinta de cero, según la hipótesis hecha, la investigación de las raíces de la ecuación

$$f(z) = 0$$

se reduce á buscar los puntos del plano que realicen simultáneamente las igualdades

$$M = 0 \text{ y } N = 0.$$

Una raíz z_0 de $f(z) = 0$ es múltiple al grado n, cuando el polinomio $f(z)$ es divisible por la *enesima* potencia de $(z - z_0)$, sin serlo por otra superior del mismo binomio.

Estas generalidades establecidas demostremos el siguiente

Lema.—*Sean dadas una variable imaginaria $z = x + i.\, y$, y una función real $f(z) = M + i.\, y.\, N$ de la misma, con un grado cualquiera m y en la cual M* y *N serán cantidades reales. Supongamos que la ecuación $f(z) = 0$ tenga n raíces iguales á $z_0 = x_0 + i.\, y_0$, pudiendo ser $n = 1$; y consideremos el punto G cuyas coordenadas con relación á dos ejes retangulares $O\,x$, $O\,y$ sean x_0 é y_0. Haciendo centro en*

G, tracemos una circunferencia con radio ρ lo suficientemente pequeño para ser inferior á y_0. y *menor que la distancia de G al punto raíz de $f(z) = 0$ más próximo á él: designando por ω el ángulo formado por G P con la dirección O x, valdrá cero cuando G P sea paralela á O x é irá creciendo á medida que G P, moviéndose siempre en el mismo sentido, pase de O x á la dirección O y* (fig. 1.ª). *Si este punto móvil P par-*

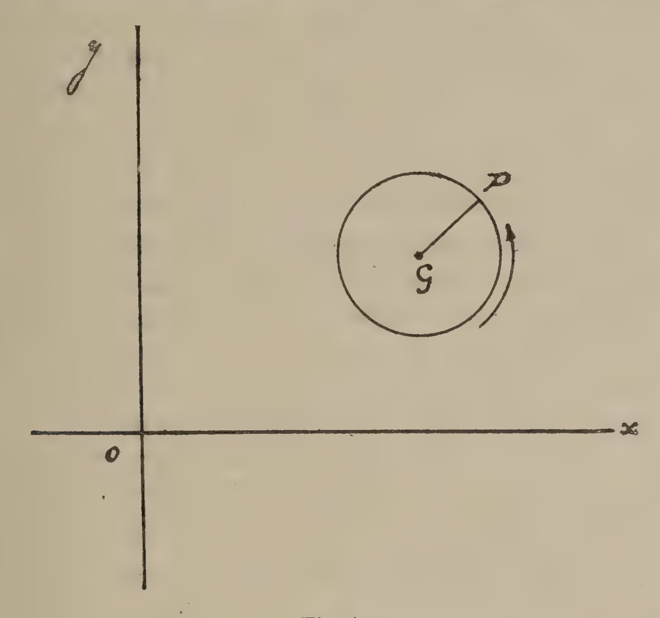


Fig. 1.ª.

tiendo de una posición cualquiera describe toda la circunferencia hasta llegar á su primitivo origen, lo que equivale á decir que el ángulo ω aumenta en 2π, la relación $\frac{M}{N}$, que para cada posición del punto P tiene un valor determinado, se anulará tantas veces como unidades hay en el número $2n$; y *anulándose pasará siempre de positiva á negativa si y_0 es positivo, y de negativa á positiva si y_0 es negativo.* (Corral.)

Aplicando este lema á la función

$$i \cdot y \cdot f(z) = -y^2 \cdot N + i \cdot y \cdot M$$

será fácil deducir que la relación $\frac{M}{N}$ también pasa por infinito un número de veces igual á $2n$, en cuyos momentos cambia de negati-

va á positiva si y_0 es positivo, y de positiva á negativa si y_0 es negativo.

En el *Álgebra Superior* de J. A. Serret (edición francesa de 1885), páginas 120 á 124 del tomo I, se supone que

$$f(Z) = P + i \cdot Q$$

en donde $Q = y \cdot N \parallel P = M$ según nuestras notaciones y con la salvedad de considerar solamente á $f(z)$ como una función real y entera de la variable z, pues de otro modo sería imposible la existencia de N con las cualidades que le suponemos.

Demuéstrase en el precitado lugar, que al describir el punto dado la circunferencia completa, la relación $\frac{P}{Q}$ se anula $2n$ veces pasando siempre de positiva á negativa; pues en dichos momentos, la *cantidad* Q permanece con signo constante, siendo n veces positiva y n veces negativa. Se tendrá entonces que cuando Q sea n veces positiva, la cantidad $P = M$ pasará de + á —; y que cuando Q sea n veces negativa, la cantidad $P = M$ pasará de — á +.

La ordenada y_0 de la raíz considerada podrá ser:

Positiva ($y_0 > 0$); en tal caso durante los n momentos que $Q = y. N$ adquiere el valor positivo, anulándose simultáneamente $P = M$, será $N > 0$: y en los n instantes en que Q sea negativo entonces $N < 0$. Tendremos, por tanto, que la relación $\frac{M}{N}$ pasará n veces del valor $\frac{+}{+} = +$ al $\frac{-}{+} = -$; y otras n veces del valor $\frac{-}{-} = +$ al $\frac{+}{-} = -$. Es decir, que $\frac{M}{N}$ se anulará entonces $2n$ veces pasando siempre de positiva á negativa.

Negativa ($y_0 < 0$); las n veces que $Q = y_0. N$ sea positivo la cantidad N será negativa ($N < 0$) y las otras n que $Q = y_0. N$ vale menos que cero se tendrá $N > 0$. Así pues, la relación $\frac{M}{N}$ anulándose pasará n veces del valor $\frac{+}{-} = -$ al $\frac{-}{-} = +$ y otras n del $\frac{-}{+} = -$ al $\frac{+}{+} = +$; ó sea que se anulará $2n$ veces pasando siempre de negativa á positiva.

Como una de las condiciones á que sometimos el radio ρ de la circunferencia es á ser menor que y_0, resultará entonces que todas

las y del círculo, consideradas al tomar $\frac{M}{N}$ sus diferentes valores, tienen el mismo signo que y_o; pues en el caso más desfavorable y llegará á valer $(y_o + \rho)$, cantidad del mismo signo que y_o desde el momento que $y_o > \rho$. De aquí se deduce la exactitud de nuestro lema.

Podemos ahora enunciar una proposición muy semejante á la establecida por el inmortal Cauchy para fijar el número de raíces complejas de una función limitadas en un contorno cerrado, y la que, según frase de M. Serret, constituye «uno de los más bellos teoremas del Álgebra».

Teorema.—*Sean dadas, una variable imaginaria* $z = x + i. y$, y $f(z) = M + i. y. N$ *una función real de esta variable, en la cual* M y N *son funciones enteras y reales de* x *é* y. *Tracemos en el plano de ejes rectangulares* $O\,x$, $O\,y$ *un contorno cerrado cualquiera que no pase por ninguno de los puntos raíces de* $f(z) = 0$ *y en el cual la relación* $\frac{M}{N}$ *tendrá un valor determinado para cada uno de sus puntos. Recorriendo el contorno* $A\ B\ C\ D$ *hasta volver al punto de partida, dicha relación* $\frac{M}{N}$ *tomará diversos valores, pasando por cero cada vez que* M *se anula y por infinito cuando* $N = 0$. *Supongamos sea* K *el número de veces que la relación* $\frac{M}{N}$ *anulándose con cambio de signo pase de positiva á negativa,* K^1 *el número de veces que el mismo cociente al anularse y cambiar de signo pase de negativo á positivo: la diferencia* $\nabla = K - K^1$ *será siempre igual al doble,* $2\,(\mu_2 - \mu_1)$, *del número* μ_2 *de raíces imaginarias de coeficiente imaginario positivo comprendidas en el contorno, menos el número* μ_1 *de raíces imaginarias incluídas también en el contorno pero con parte imaginaria negativa.* (Corral.)

La forma del contorno cerrado $A\ B\ C\ D$ (fig. 2.ª) puede ser cualquiera, cóncava ó convexa, atravesando en el caso general al eje $O\,x$ de las abcisas, de tal modo que entonces las raíces de $f(z) = 0$ comprendidas en su interior tendrán su parte imaginaria unas veces positiva y otras negativa.

Los únicos cambios de signo de la relación $\frac{M}{N}$ que nos interesan al presente son los que ocurren cuando dicho cociente pasa por cero.

Debemos advertir que desechamos los cambios de signo originados por alcanzar $\frac{M}{N}$ un valor infinito, así como también que $\frac{M}{N}$ puede anularse permaneciendo en las inmediaciones con el mismo sentido (positiva ó negativa).

El razonamiento que á continuación exponemos se compone de cuatro partes:

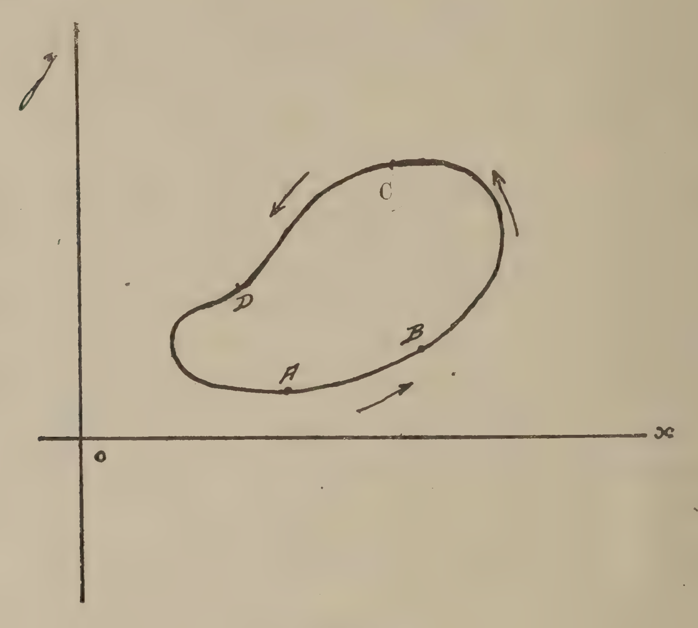


Fig. 2.ª.

1.ª *Si el teoroma enunciado se verifica para dos contornos A B C A y A D B A de parte común A B, será cierto también para la figura total A D B C A formada por la unión de ambos* (figura 3.ª).

Designemos por μ_2 el número de raíces iguales ó desiguales que con parte imaginaria positiva se encuentran comprendidas en el contorno total $A\ D\ B\ C\ A$, μ_1 las que con igual carácter tienen su parte imaginaria negativa, siendo ∇ el exceso, $K - K^1$, relativo á dicha figura. Supongamos que

$$\begin{matrix} \mu'_1 & \mu'_2 & \nabla' \\ \mu''_1 & \mu''_2 & \nabla'' \end{matrix}$$

sean los números análogos correspondientes á los contornos parciales $A\ B\ C\ A$ y $A\ D\ B\ A$. Como, por hipótesis, el teorema es cierto para tales figuras, tendremos

$$\nabla' = 2\ (\mu'_2 - \mu'_1) \qquad \nabla'' = 2\ (\mu''_2 - \mu''_1)$$

La suma $\nabla' + \nabla''$ se compone, evidentemente, del exceso ∇ relativo al contorno total, aumentado en la suma de los dos excesos que

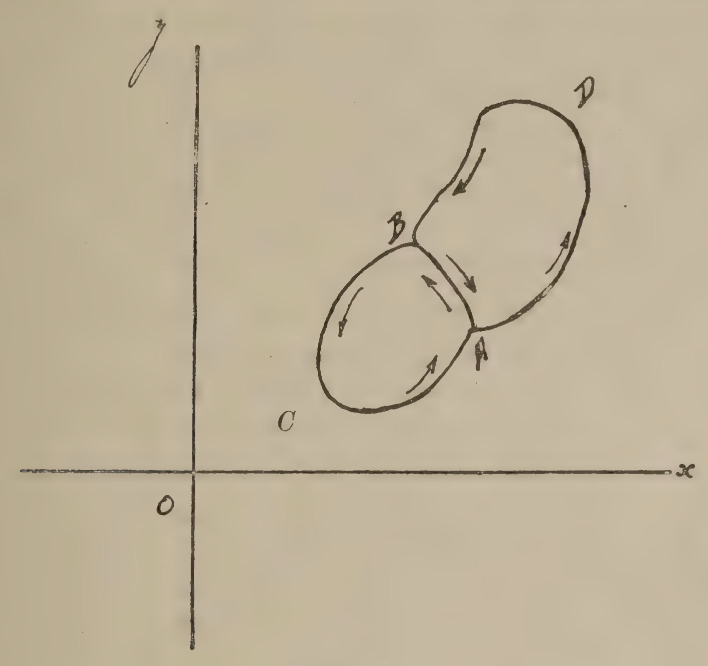


Fig. 3.ª

corresponden, uno á la parte $A\ B$ del contorno $A\ B\ C\ A$ y el otro á la $B\ A$ del segundo contorno $A\ D\ B\ A$. Siendo estos dos últimos excesos iguales y de signos contrarios, resultará que

$$\nabla = \nabla' + \nabla'' = 2\ (\mu''_2 + \mu'_2 - \mu''_1 - \mu'_1)$$

y observando después la existencia de las igualdades

$$\mu_2 = \mu'_2 + \mu''_2 \qquad \mu_1 = \mu'_1 + \mu''_1$$

deduciremos en definitiva, de conformidad con el enunciado, la exactitud de la relación

$$\nabla = 2\ (\mu_2 - \mu_1).$$

Queda así demostrado que si el teorema se verifica para un número cualquiera de contornos yuxtapuestos, será también cierto para el contorno total formado por su unión.

2.ª *El teorema enunciado, cuando no hay raíz alguna de* $f(z) = 0$ *en el espacio limitado por el contorno supuesto, es también cierto. En otros términos, si* $\mu_2 = \mu_1 = 0$ *se tendrá igualmente* $\nabla = 0$.

Según la hipótesis hecha no pueden existir, sobre el contorno mismo ó en su interior, puntos para los cuales se tenga simultáneamente $M = 0$, $N = 0$, si bien habrá muchos en los que aisladamente se verifique que $M = 0$ ó bien $N = 0$. En virtud de tal particularidad, será siempre posible descomponer el espacio limitado por la figura dada en dos partes ó más, tales que cada una de ellas no contenga sobre su perímetro ó en su interior más que puntos para los cuales $M = 0$ ó bien $N = 0$.

En aquellos contornos parciales donde no puede ser $M = 0$, la relación $\frac{M}{N}$ no se anula en ellos; luego sobre los mismos $\nabla = 0$.

Las otras porciones donde M llega á anularse, la función N conserva siempre el mismo signo en los diversos puntos de su perímetro ó interior, pues de lo contrario habrá alguno para el cual N fuere cero, lo que es contrasupuesto. En tales contornos, $\frac{M}{N}$ sólo cambia de signo cuando M se anula, y como al recorrer todo el perímetro dicha relación tiene que recuperar su primitivo valor, demostrado queda que si K veces se anula pasando de positiva á negativa, otras tantas será cero cambiando de negativa á positiva; por todo lo cual, también en los mismos será $\nabla = 0$.

Verificándose el teorema enunciado para cada una de las partes en que el contorno ha sido dividido, será también cierto, según probamos anteriormente, para la figura dada.

3.ª *Cuando en el espacio limitado por el contorno supuesto la ecuación* $f(z) = 0$ *no tiene más que una sola raíz múltiple de grado* n, *el teorema enunciado será cierto, es decir, que entonces* $\nabla = 2n$.

En la figura 4.ª representamos por $A\ B\ C\ D$ el contorno dado y por G el punto raíz cuyo grado de multiplicidad suponemos sea n. Trazando una circunferencia con radio suficientemente pequeño y cuyo centro sea G, se la podrá unir por medio de las rectas $N\ Q$ y $M\ P$ al contorno $A\ B\ C\ D$, que por tal circunstancia podrá ser considerado como el resultado de la yuxtaposición de los tres con-

tornos parciales *K N Q D A P M K*, *M I N K M*, *I M P B C Q N I*. El teorema que nos ocupa se verifica, según el lema demostrado y el caso anterior 2.º, para cada uno de estos contornos parciales, razón por la cual será también cierto para la figura dada *A B C D*.

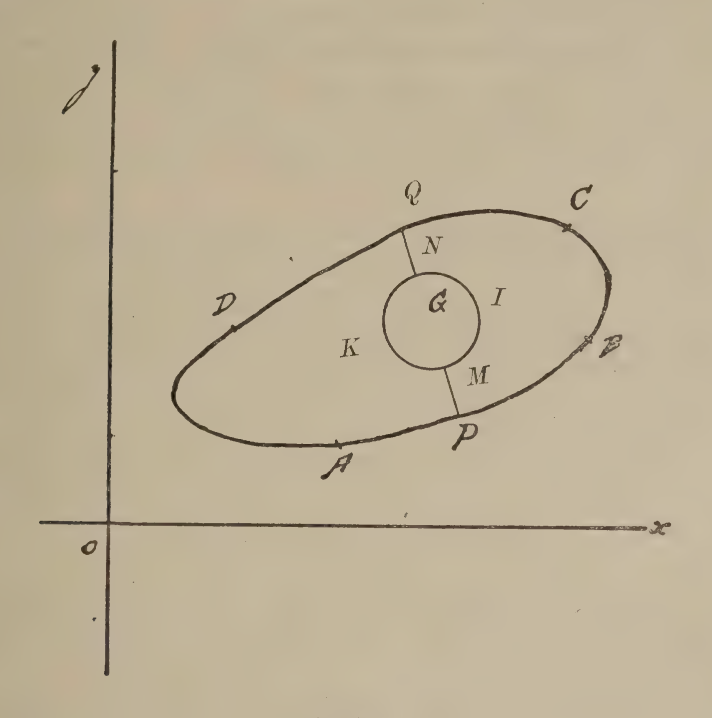


Fig. 4 ª.

4.ª *El teorema enunciado se verifica cualquiera que sea el número de puntos raíces comprendidos en el contorno supuesto.*

Será siempre posible descomponer el espacio abarcado por el contorno en diversas partes tales que cada una de ellas sólo contenga un punto raíz. Según los casos anteriores la proposición enunciada se verifica en cada uno de estos contornos parciales, por lo cual será igualmente exacta en la figura total.

Las precedentes consideraciones son idénticas á las utilizadas por Sturm y Liouville para demostrar el teorema de Cauchy, al cual el nuestro es correlativo en cierto modo.

§ 2.—Característica de las tres funciones consideradas.

Admitiendo el concepto de *característica de tres* funciones definido por Kronecker y descrito detalladamente en el *Traité D'Algèbre Superieur* de H. Weber (páginas 339 á 346), el teorema anterior puede enunciarse, siendo la función de coeficientes reales

$$F(Z) = \varphi(x\, y) + i \,.\, y \,.\, \theta(x\, y),$$

del modo siguiente:

Teorema.—*La característica del sistema de tres funciones* φ, θ y f *es igual á la diferencia entre los números de puntos de intersección de las curvas* φ, θ, *que situados en el interior del contorno* f *tienen respectivamente ordenadas* (y) *positivas y negativas; ó sea igual al exceso del número de raíces de* $F(z)$ *situadas dentro del contorno* f *con parte imaginaria positiva sobre el número de aquellas otras raíces interiores con coeficiente imaginario negativo.* (Corral.)

Suponemos que $F(z)$ y $F'(z)$ no se anulan simultáneamente, siendo las raíces de la ecuación

$$F(z) = 0$$

todas diferentes. La función real y entera $F(z)$ sólo se anula para los valores de z, que corresponden á los puntos de intersección de las dos curvas $\varphi(x\, y)$ y $\theta(x\, y)$.

Recordando el desarrollo en serie de las funciones $\varphi(x\, y)$, $\theta(x\, y)$ que expusimos en el número anterior, es fácil comprobar la exactitud de las dos siguientes igualdades

$$\varphi'_x = \theta + y \,.\, \theta'_y \qquad\qquad \varphi'_y = -\, y \,.\, \theta'_x$$

admitiendo para las derivadas parciales de una función con respecto á una variable, la notación presente.

El determinante funcional

$$\left[\varphi\, \theta\right] = \varphi'_x \,.\, \theta'_y \,.- \varphi'_y \,.\, \theta'_x = \frac{1}{y}\left[\varphi'^{\,2}_x + \varphi'^{\,2}_y - \varphi'_x \,.\, \theta\right] =$$
$$= y \,.\, \theta'^{\,2}_x + y \,.\, \theta'^{\,2}_y + \theta \,.\, \theta'_y$$

se anula cuando φ'_x y φ'_y son ceros ó cuando θ'_x y θ'_y lo son tam-

bién simultáneamente. Tales circunstancias no pueden presentarse en un punto de intersección de φ y θ, porque entonces $F(z)$ y

$$F'(z) = \varphi'_x + i \cdot y \cdot \theta'_x = - i \varphi'_y + \theta + y \cdot \theta'_y$$

se anularían al mismo tiempo, en contra de la hipótesis hecha.

El sentido positivo sobre las curvas φ ó θ está determinado por el signo de la función en las regiones próximas del plano.

Uniendo á las dos curvas anteriores una tercera función $f(x\,y)$ que igualada á cero representa una curva cerrada, se tendrá para valor de la característica de este sistema de tres funciones

$$(1) \qquad K = \frac{1}{2}\Big[E(f;\varphi,\theta) - S(f;\varphi,\theta)\Big] = \frac{1}{2}\Big[E(f;\theta,\varphi) - S(f;\theta,\varphi)\Big]$$

aceptando los símbolos descritos en la mencionada obra de Weber.

De la relación consignada anteriormente

$$\varphi'_x = \theta + y \cdot \theta'_y$$

se deduce que

$$y \cdot \theta \cdot \theta'_y > -\frac{1}{2}\left(\theta^2 + y^2 \cdot \theta'^2_y\right)$$

por lo cual

$$y \cdot \Big[\varphi\,\theta\Big] = y^2 \cdot \theta'^2_x + y^2 \cdot \theta'^2_y + y \cdot \theta \cdot \theta'_y > y^2 \cdot \theta'^2_x + \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \theta'^2_y - \frac{1}{2}\theta^2$$

y en definitiva

$$y \cdot [\varphi\,\theta] + \theta^2 > 0.$$

Para todos los puntos de intersección de las curvas φ y θ se tendrá siempre

$$y \cdot [\varphi\,\theta] > 0$$

por cuanto entonces $\theta = 0$. De aquí resulta que en la región del plano donde las ordenadas son positivas, es decir, que $y > 0$, el determinante funcional $[\varphi\,\theta]$ será mayor que cero, por lo cual todos los puntos de intersección de φ y θ serán puntos de salida $S(\varphi\,\theta)$.

En la parte inferior del plano ó región de las $y < 0$, el determinante funcional $[\varphi\ \theta]$ es negativo, y todos los puntos de intersección de φ y θ serán entonces puntos de entrada $E(\varphi\ \theta)$.

Por todo lo expuesto se desprende que las curvas φ y θ en las regiones superior é inferior del plano no pueden ser cerradas, y tendrán ramas infinitas; pues de otro modo, á un punto de salida ó entrada seguiría necesariamente otro de entrada ó salida. Podría también ocurrir que las curvas φ y θ fuesen cerradas, pero entonces tendrán que atravesar el eje de las x; de tal modo, que en la región superior quedasen los puntos de salida, y en la inferior los puntos de entrada.

Las curvas φ y θ determinan una región rayada en la figura 5.ª en donde el producto $\varphi\ .\ \theta$ es siempre negativo.

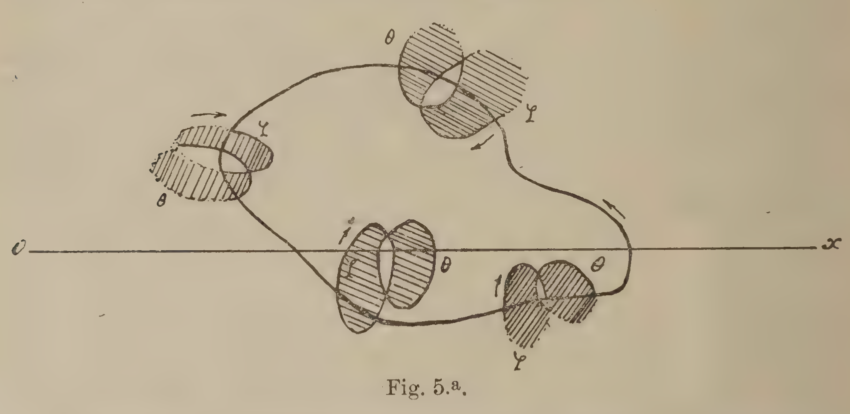


Fig. 5.ª.

Para aplicar á estas ramas de curvas el principio general de las características, es preciso transformar las curvas φ y θ en curvas cerradas, uniéndolas entre sí por líneas arbitrarias, exteriores todas al contorno cerrado $f(x\ y) = 0$. La característica se determina entonces por la fórmula (1) una vez completadas las curvas, según indica la figura 5.ª

Los puntos de intersección complementarios así introducidos pueden ser puntos de salida ó puntos de entrada: los designaremos para distinguirlos por $S'(\varphi\ \theta)$ á los primeros, y por $E'(\varphi\ \theta)$ á los segundos.

Los primitivos puntos de intersección son llamados, respectivamente, por $S(\varphi\ \theta)$ y $E(\varphi\ \theta)$. Es de observarse que los puntos complementarios adicionados son todos exteriores al contorno f.

Como el número total de puntos de entrada es el mismo que los de salida, se tendrá

(2) $$S(\varphi\,\theta) + S'(\varphi\,\theta) = E(\varphi\,\theta) + E'(\varphi\,\theta).$$

Dividamos los puntos $S(\varphi\ \theta)$ en dos grupos: los puntos $S_\sigma(\varphi\ \theta)$ situados al exterior de f y los puntos $S_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ interiores al contorno f.

Igual clasificación puede hacerse con los puntos $E(\varphi\ \theta)$ en $E_\sigma(\varphi\ \theta)$ exteriores á f y $E_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ interiores á dicho contorno.

Estableciendo los *caracteres* de los diversos puntos de intersección, tendremos:

$S(\varphi\ \theta)\ldots$	$S_\sigma(\varphi\ \theta)$ exterior á f	-1
	$S_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ interior á f	$+1$
$E(\varphi\ \theta)\ldots$	$E_\sigma(\varphi\ \theta)$ exterior á f	$+1$
	$E_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ interior á f	-1
	$S'(\varphi\ \theta)$ exterior á f	-1
	$E'(\varphi\ \theta)$ exterior á f	$+1$

Como la característica del sistema de funciones $(f,\ \varphi,\ \theta)$ *es igual á la semisuma de los caracteres de los diferentes puntos de intersección de* φ *y* θ, se tendrá entonces

$$2K = -S_\sigma + S_\varepsilon + E_\sigma - E_\varepsilon - S' + E'$$

igualdad que sumada con la (2), nos da

(3) $$K = S_\varepsilon - E_\varepsilon$$

recordando que evidentemente

$$S(\varphi\ \theta) = S_\sigma(\varphi\ \theta) + S_\varepsilon(\varphi\ \theta)$$
$$E(\varphi\ \theta) = E_\sigma(\varphi\ \theta) + E_\varepsilon(\varphi\ \theta).$$

La cifra $S_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ representa el número total de puntos de intersección de φ y θ comprendidos en el contorno f con parte imaginaria positiva, así como $E_\varepsilon(\varphi\ \theta)$ las raíces de $F(z) = 0$ con ordenadas negativas é interiores á f; por todo lo cual la igualdad (3) demuestra el teorema enunciado.

§ 3. — **Raíces imaginarias conjugadas.**

Las consideraciones anteriores nos permiten deducir directamente la relación que existe en una función real, entre el número de

sus raíces con parte imaginaria positiva de aquellas que tienen ordenada negativa.

Sea como antes

$$F(z) = \varphi(x\,y) + i \,.\, y \,.\, \theta(x\,y)$$

una función entera y real de la variable imaginaria

$$z = x + i \,.\, y.$$

Llamando

$$y \,.\, \theta(x\,y) = \Psi(x\,y)$$

será preciso que los coeficientes de $F(z)$ sean todos reales, á fin de que la función $\theta(x\,y)$ sea también entera. Admitimos simultáneamente que $F(z)$ y $F'(z)$ no tienen factor común.

Siendo el contorno f un círculo de radio suficientemente grande, la característica del sistema de las tres funciones f, φ, θ puede encontrarse con facilidad y comprobarse que es igual á cero. Según el teorema anterior, resultará entonces demostrado que *en toda función real el número de raíces con parte imaginaria negativa es igual al número de las que tienen coeficiente imaginario positivo;* ó en otros términos, que si una función entera de coeficientes reales admite una raíz $\alpha + i \,.\, \beta$, también aceptará su imaginaria conjugada $\alpha - i \,.\, \beta$. Este conocido principio de Álgebra queda así establecido directamente, con independencia del teorema fundamental que precisa el número de raíces que tiene una función de grado n.

Haciendo uso de las coordenadas polares, será

$$z = R\,(\cos\omega + i \,.\, \operatorname{sen}\omega)$$

y como

$$F(z) = z^n + a_1 \,.\, z^{n-1} + a_2 \,.\, z^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} \,.\, z + a_n$$

deduciremos que

$$\varphi(x\,y) = R^n \,.\, \cos n\,\omega + a_1 \,.\, R^{n-1} \,.\, \cos(n-1)\,\omega + a_2 \,.\, R^{n-2} \,.\, \cos(n-2)\,\omega + \\ + \ldots\ldots + R a_{n-1} \,.\, \cos\omega + a_n$$

$$\Psi(x\,y) = R^n \,.\, \operatorname{sen} n\,\omega + a_1 \,.\, R^{n-1} \,.\, \operatorname{sen}(n-1)\,\omega + a_2 \,.\, R^{n-2} \,.\, \operatorname{sen}(n-2)\,\omega + \\ + \ldots\ldots + a_{n-1} \,.\, R \,.\, \operatorname{sen}\omega$$

Las derivadas con relación á ω son

$$\frac{d\,\varphi}{d\,\omega} = -\,n \,.\, R^n \,.\, \operatorname{sen} n\,\omega - (n-1) \,.\, R^{n-1} \,.\, a_1 \,.\, \operatorname{sen}(n-1)\,\omega - \ldots\ldots - \\ - R \,.\, a_{n-1} \,.\, \operatorname{sen}\omega$$

$$\frac{d\,\Psi}{d\,\omega} = n \,.\, R^n \,.\, \cos n\,\omega + (n-1) \,.\, a_1 \,.\, R^{n-1} \,.\, \cos (n-1)\,\omega + \ldots\ldots +$$
$$+ a_{n-1} \,.\, R \,.\, \cos \omega$$

La circunferencia de radio R se divide en 4 n partes iguales por lo que el ángulo central de cada uno de estos arcos vale

$$2\,\alpha = 2 \,.\, \frac{\pi}{4\,.\,n}.$$

Para fijar mejor las ideas, en la figura 6.ª hemos adoptado $n = 3$,

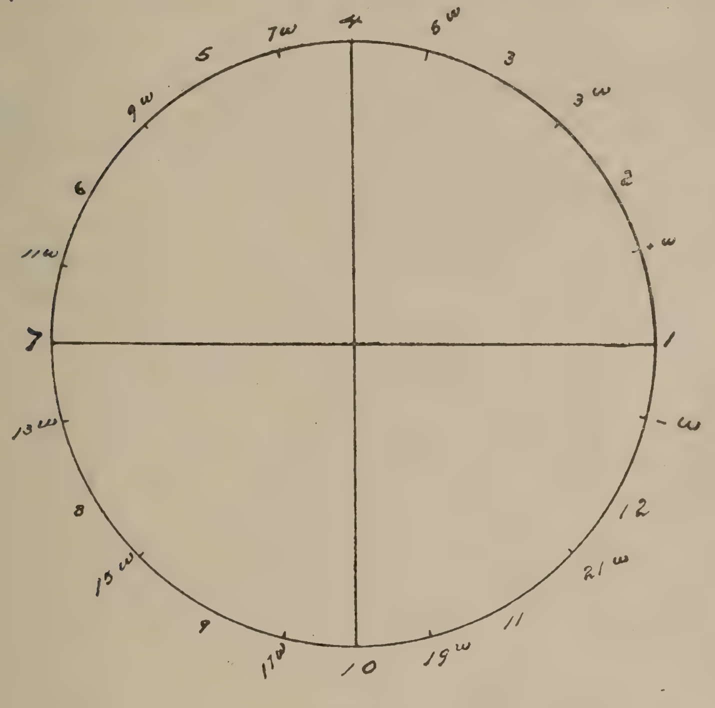


Fig. 6.ª.

dividiendo la circunferencia en doce partes. Los puntos de división comienzan en $\omega = -\alpha$ y continúan del modo siguiente:

$$-\alpha\,,\ \alpha\,,\ 3\,\alpha\,,\ 5\,\alpha\,,\ 7\,\alpha\ \ldots\ldots\ (8\,n-3)\,\alpha.$$

A los intervalos sucesivos se les da una numeración corrida con los índices 1, 2, 3 ...... 4 n; de tal modo que el arco de índice v tiene por puntos límites $(2\,v-3)\,\alpha$ y $(2\,v-1)\,\alpha$.

Durante los intervalos 1, 3, 5 .... $4n - 1$ la función trigonométrica *cos* $n\omega$ se conserva del mismo signo, si bien es sucesivamente positiva y negativa. En los segmentos 2, 4, 6 ..... $4n$ la función *sen* $n\omega$ tiene siempre el mismo sentido, pero cambia alternativamente de positiva á negativa.

Adoptando para R un valor bastante grande se podrá conseguir que en los espacios 1, 3, 5 ..... $4n - 1$ las funciones φ y $\frac{d\Psi}{d\omega}$ tengan el mismo signo que *cos* $n\omega$, mientras que en los intervalos 2, 4, 6 ..... $4n$ las funciones Ψ y $-\frac{d\varphi}{d\omega}$ sean del mismo sentido que *sen* $n\omega$.

Como la función φ cambia de signo en los intervalos 2, 4, 6 .... $4n$ durante los cuales su derivada conserva un sentido constante, se desprende que en los mismos φ pasa por cero una sola vez. Con idéntico razonamiento deducimos que la función Ψ se anula una sola vez en cada uno de los intervalos 1, 3, 5 ..... $4n - 1$.

Fácil es ahora comprender que en los puntos de división α, 5α, 9α .... $(8n - 3) . \alpha$ el producto $\varphi . \Psi$ es positivo: es decir, que

$$\varphi . \Psi = y . \varphi . \theta > 0.$$

Para los n puntos anteriores que caen en la región de las ordenadas positivas $(y > 0)$ el producto $\varphi . \theta$ es mayor que cero: luego en los espacios 2, 4, 6 ...... $2n$ se encuentran n puntos $E(f; \varphi, \theta)$.

Los puntos $(4n + 1) . \alpha$, $(4n + 5) . \alpha$ .... $(8n - 3) . \alpha$ de la serie anterior, se encuentran en la región de las ordenadas negativas $(y < 0)$, por lo cual el producto $\varphi . \theta$ es en ellos negativo: luego en los espacios $2n + 2$, $2n + 4$ .... $4n$ existen n puntos $S(f; \varphi, \theta)$.

Tendremos por tanto

$$E(f; \varphi, \theta) = n \qquad S(f; \varphi, \theta) = n$$

luego la característica de las tres funciones f, φ, θ valdrá

$$K = \frac{1}{2}\left[E(f; \varphi, \theta) - S(f: \varphi, \theta)\right] = 0.$$

El número de raíces de $F(z)$ que tienen parte imaginaria positiva es el mismo que la totalidad de raíces con ordenada negativa.

Los puntos $\omega = 0$ y $\omega = \pi$ de la circunferencia corresponden

á los arcos parciales de índices 1 *y* $2n + 1$, cada uno de los cuales contiene un punto de intersección de θ, pero no de φ.

Según lo ya demostrado;

El círculo f estando dividido por el eje de las x en dos semicírculos, cada uno de éstos contiene

$$n \text{ puntos } E\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta)$$
$$n \text{ puntos } S\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta).$$

Los puntos $\omega = \frac{\pi}{2}$ y $\omega = 3\,.\,\frac{\pi}{2}$ de la circunferencia corresponden á los segmentos de índices $(n + 1)$ y $(3n + 1)$, que son pares ó impares según que n sea á su vez impar ó par. Cuando n sea par, estos segmentos $(n + 1)$ y $(3n + 1)$ contienen cada uno un punto de intersección de θ, pero no de φ: así es que en los dos semicírculos separados por el eje de las y existirán respectivamente $\frac{n}{2}$ puntos $E\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta)$ y $\frac{n}{2}$ puntos $S\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta)$. Siendo n impar, los arcos $(n + 1)$ y $(3n + 1)$ contendrán un punto de intersección de φ pero no de θ. De aquí deducimos que:

El círculo f estando dividido por el eje de las y en dos semicírculos, cada uno de éstos contiene

$$\frac{n}{2} \text{ puntos } E\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta) \text{ y } \frac{n}{2} \text{ puntos } S\,(f\,;\,\varphi\,,\,\theta) \text{ si } n \text{ es par.}$$

	SEMICÍRCULO DERECHO		SEMICÍRCULO IZQUIERDO
si n es impar......	$\frac{n+1}{2}$ puntos $E\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$	y	$\frac{n-1}{2}$ puntos $E\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$
	$\frac{n-1}{2}$ puntos $S\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$	y	$\frac{n+1}{2}$ puntos $S\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$

ó inversamente

si n es impar......	$\frac{n-1}{2}$ puntos $E\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$	y	$\frac{n+1}{2}$ puntos $E\,(f\,:\,\theta\,;\,\varphi)$
	$\frac{n+1}{2}$ puntos $S\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$	y	$\frac{n-1}{2}$ puntos $S\,(f\,;\,\theta\,,\,\varphi)$

CAPÍTULO II

Eulerianas de una función entera.

---

§ 4.—Definición de eulerianas.

Sea

$$f(x) = a_0 \cdot x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + a_2 \cdot x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} \cdot x + a_m$$

una función racional y entera de la variable x; su primera derivada es

$$f'(x) = m \cdot a_0 \cdot x^{m-1} + (m-1) \cdot a_1 \cdot x^{m-2} + \ldots + 2 \cdot a_{m-2} \cdot x + a_{m-1}.$$

Formando la diferencia

$$m \cdot f(x) - x \cdot f'(x) = a_1 \cdot x^{m-1} + 2\, a_2 \cdot x^{m-2} + \ldots + (m-1) \cdot a_{m-1} \cdot x + m \cdot a_m$$

resulta una función de tan sencilla estructura como $f'(x)$, y que, según probaremos, en la resolución de ecuaciones numéricas goza de tanta importancia como la derivada. En honor al ilustre matemático suizo Euler, denominamos *euleriana primera de una función entera á la diferencia que existe entre el producto de la función por su grado y el de la variable por la derivada de aquélla.* (Corral.)

La euleriana de la primera euleriana de $f(x)$, es la *euleriana segunda* de $f(x)$, y así sucesivamente.

Para designar la euleriana de *orden* v de la función $f(x)$, adoptaremos una notación análoga á la que empleó Cauchy para indicar las derivadas diversas de una función, sustituyendo la D por una E; así, dicha euleriana v, será representada por el símbolo $E_v f.(x)$, y será de grado $(m - v)$.

Comparando á $E_1 f(x)$ con $f(x)$, se deduce la siguiente regla práctica: *La euleriana primera de una función entera de variable* x, *se forma multiplicando el coeficiente de cada término por la diferencia entre el grado de dicha función y el exponente de* x *en ese término; ó también se multiplica el coeficiente de cada término de la función por el número completo de términos que le anteceden, pero conservando siempre á la variable correspondiente su mismo exponente.*

El valor de la euleriana primera de una función puede exponerse bajo otra forma algo diferente á la anterior. Así, en efecto,

$$E_1 f(x) = m \,.\, f(x) - x \,.\, f'(x) = - x^{m+1} \,.\, \frac{f'(x)\; x^m - m \,.\, x^{m-1} \,.\, f(x)}{x^{2 \cdot m}}$$

pero como

$$D_1 \frac{1}{x^m} \,.\, f(x) = \frac{f'(x) \,.\, x^m - m \,.\, x^{m-1} \,.\, f(x)}{x^{2\, m}}$$

se deducirá finalmente que

$$E_1 f(x) = - x^{m+1} \,.\, D_1 \frac{1}{x^m} \,.\, f(x)$$

siendo $f(x)$ de grado m en x.

Sea ahora

$$f(x\, y\, z \ldots .) = \Sigma A_{\alpha\,.\,\beta\,.\,\gamma \ldots .}\; x^{\alpha} \,.\, y^{\beta} \,.\, z^{\gamma} \ldots \ldots$$

una función racional y entera de varias variables independientes x, y, z, en donde los números $\alpha, \beta, \gamma \ldots .$ son enteros y positivos, con una suma $\alpha + \beta + \gamma + \ldots .$ que no puede exceder del grado n de la función, si bien se le iguala en un término por lo menos.

El concepto de euleriana de una función racional y entera con una sola variable, se extiende á las funciones con muchas variables; bastará para ello tomar la euleriana de la función dada con relación á una sola variable, como si todas las restantes fuesen cantidades constantes. Se obtiene así la *euleriana parcial de la función* con relación á la variable considerada.

Siendo

$$f(x\,y\,z) = a_o\,x^2 + a_1\,y^2 + a_2\,z^2 + a_3\,x\,y + a_4\,x\,z$$

tendremos, según la anterior definición,

$$E_1^x f(x\,y\,z) = a_3\,.\,x\,.\,y + a_4\,.\,x\,.\,z + 2\,a_1\,.\,y^2 + 2\,.\,a_2\,.\,z^2$$

$$E_1^y f(x\,y\,z) = a_3\,x\,y + 2\,a_o\,x^2 + 2\,a_2\,z^2 + 2\,a_4\,x\,z$$

$$E_1^z f(x\,y\,z) = a_4\,x\,z + 2\,a_o\,x^2 + 2\,a_1\,y^2 + 2\,a_3\,x\,y$$

Teorema I.—*La suma de las eulerianas parciales de una función homogénea de diversas variables, es igual al producto obtenido multiplicando á la función dada por su grado y por el número de variables disminuído en una unidad.* (Corral.)

Sea, en efecto,

$$u = f(x\,,y,\,z\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

la función homogénea de grado m y con n variables $x\,,\,y\,,\,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega$.

Tomando las eulerianas parciales con relación á cada una de dichas variables, tendremos

$$E_1^x u = m\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega) - x\,.\,f'_x(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

$$E_1^y u = m\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega) - y\,.\,f'_y(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

$$E_1^z u = m\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega) - z\,.\,f'_z(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

. . . .

$$E_1^\omega u = m\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega) - \omega\,.\,f'_\omega(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

igualdades que sumadas ordenadamente nos dan

$$E_1^x u + E_1^y u + E_1^z u + \,.\,.\,.\,.\,.\, + E_1^\omega u = m\,.\,(n-1)\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,.\,\omega)$$

recordando que, en virtud de un conocido teorema de Euler,

$$x\,.\,f'_x + y\,.\,f'_y + z\,.\,f'_z + \,.\,.\,.\,.\,.\, + \omega\,.\,f'_\omega = m\,.\,f(x\,,y\,,z\,.\,.\,.\,.\,\omega)\,.\,-$$

Siendo la euleriana primera de $f(x)$ una función de grado $(m-1)$, es evidente que la euleriana *emesima* será una cantidad independiente de la variable x, que puede encontrarse fácilmente calculando las diversas eulerianas sucesivas de $f(x)$. Así tendremos

$$(I)\begin{cases} f(x) = a_0 \,.\, x^m + a_1 \,.\, x^{m-1} + a_2 \,.\, x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-1} \,.\, x + a_m \\ E_1 f(x) = a_1 \,.\, x^{m-1} + 2\, a_2 \,.\, x^{m-2} + 3 \,.\, a_3 \,.\, x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ \quad + (m - 1)\, a_{m-1} \,.\, x + m \,.\, a_m \\ E_2 f(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, a_2 \,.\, x^{m-2} + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a_3 \,.\, x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ \quad + (m - 1) \,.\, (m - 2) \,.\, a_{m-1} \,.\, x + m\,(m - 1) \,.\, a_m \\ E_3 f(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, a_3 \,.\, x^{m-3} + 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4\, a_4 \,.\, x^{m-4} + \ldots\ldots + \\ \quad + (m - 1) \,.\, (m - 2) \,.\, (m - 3) \,.\, a_{m-1} \,.\, x + m \,.\, (m - 1) \,.\, (m - 2) \,.\, a_m \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ E_m f(x) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots\ldots m \,.\, a_m \end{cases}$$

Es curioso observar que la derivada *emesima* de $f\ (x)$ vale $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \,.\, a_0$ mientras que la euleriana del mismo orden es $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m \,.\, a_m$.

Hemos afirmado *que siempre* $E_1 f(x)$ *es de grado* $(m — 1)$; y este particular necesita una aclaración importante. Cuando el coeficiente a_1 es diferente de cero, claro está que $E_1\ f\ (x)$ posee el término $a_1 \,.\, x^{m-1}$ y entonces su grado será evidentemente $(m — 1)$. Pero cuando a_1 sea cero, el primer término de $E_1\ f\ (x)$ será á lo más $2\ a_2\ x^{m-2}$ y su *grado efectivo* valdrá como máximo $(m — 2)$. Esta circunstancia obliga á distinguir entre dos clases de eulerianas; *efectivas* y *nominales*. Las primeras son las que se calculan tomando de base el grado efectivo de la función; las segundas las establecidas de acuerdo con su grado nominal.

Según esto, es evidente que $E_1\ f\ (x)$ *es al mismo tiempo la euleriana nominal y efectiva de* $f\ (x)$; no ocurriendo lo mismo con las eulerianas de orden superior cuando algunos de los coeficientes de $f\ (x)$ es cero. Así por ejemplo, sea la función

$$f(x) = x^5 - 7\ x^2 + 5\ x - 4$$

cuya primera euleriana vale siempre

$$E_1\ f(x) = - 21 \,.\, x^2 + 20 \,.\, x - 20.$$

El grado efectivo de $E_1\ f\ (x)$ es 2, de modo que la euleriana segunda efectiva de $f\ (x)$ será

$$E_{11}\, f(x) = 20 \,.\, x - 40.$$

En todo lo que sigue, *prescindiremos de las eulerianas efectivas para considerar solamente las diversas eulerianas nominales de la fun-*

ción, que son las que ofrecen verdadero interés. Con tal acuerdo el grado de $E_1 f(x)$ se le supone siempre igual á $(m - 1)$, cuya cifra sirve para calcular $E_2 f(x)$ y demás eulerianas. Es decir, que las diversas eulerianas de $f(x)$ *estarán siempre* dadas por las igualdades (1) aun cuando muchos de los coeficientes que allí aparecen sean nulos.

Reconsiderando el ejemplo último y asignando á $E_1 f(x)$ el grado nominal de 4, se tendrá

$$E_2 f(x) = -42 \, . \, x^2 + 60 \, . \, x - 80.$$

El grado efectivo de la euleriana segunda es 2, pero de acuerdo con el convenio admitido supondremos sea 3, razón por la cual

$$E_3 f(x) = -42 \, . \, x^2 + 120 \, . \, x - 240.$$

Aquí ya el grado nominal coincide con el grado efectivo, por lo que se deducirá inmediatamente

$$E_4 f(x) = 120 \, . \, x - 480$$
$$E_5 f(x) = -480.$$

La actual observación sobre el modo de calcular las eulerianas sucesivas de una función, es importantísimo y debe tenerse siempre muy presente en las aplicaciones para evitar incurrir en lamentables errores, tomando *eulerianas efectivas* en vez de *eulerianas nominales.*

Para fijar bien las ideas y eludir confusiones en lo sucesivo, consideremos diversos ejemplos prácticos. La función de sexto grado

$$f(x) = 3\, x^6 - 4 \, . \, x^3 + 7$$

tiene las siguientes eulerianas:

$$E_1 f(x) = -12 \, . \, x^3 + 42$$
$$E_2 f(x) = -24 \, . \, x^3 + 210$$
$$E_3 f(x) = -24 \, . \, x^3 + 840$$
$$E_4 f(x) = +2520$$
$$E_5 f(x) = 5040$$
$$E_6 f(x) = 5040$$

calculadas en el supuesto de ser los grados de $E_1 f(x)$, $E_2 f(x)$, $E_3 f(x)$, $E_4 f(x)$, $E_5 f(x)$ respectivamente iguales á 5, 4, 3, 2 y 1.

Si erróneamente se hubiesen tomado las eulerianas efectivas tendríamos sólo las dos funciones

$$E_1\, f(x) = -12\,.\,x^3 + 42$$

$$E_{11}\, f(x) = 126$$

que no son de utilidad para nuestros desarrollos y las cuales nunca se consideran.

Sea ahora la función

$$f(x) = x^7 - 5\,.\,x^3 + 4\,.\,x - 3$$

de grado séptimo; sus diversas eulerianas nominales valen

$$E_1\, f(x) = -20\,.\,x^3 + 24\,.\,x - 21$$

$$E_2\, f(x) = -60\,.\,x^3 + 110\,.\,x - 126$$

$$E_3\, f(x) = -120\,.\,x^3 + 440\,.\,x - 630$$

$$E_4\, f(x) = -120\,.\,x^3 + 1320\,.\,x - 2520$$

$$E_5\, f(x) = 2640\,.\,x - 7560$$

$$E_6\, f(x) = 2640\,.\,x - 15120$$

$$E_7\, f(x) = -15120$$

y han sido deducidas de suponer que los grados respectivos de $E_1\, f(x)$, $E_2\, f(x)$, $E_3\, f(x)$, $E_4\, f(x)$, $E_5\, f(x)$, $E_6\, f(x)$, valen 6, 5, 4, 3, 2 y 1. La serie de eulerianas efectivas es en cambio:

$$E_1\, f(x) = -20\,.\,x^3 + 24\,.\,x - 21$$

$$E_{11}\, f(x) = 48\,.\,x - 63$$

$$E_{111}\, f(x) = -63$$

de las que prescindimos por completo.

Queda así, pues, entendido, que en todo lo restante de esta obra y aun cuando no se manifieste explícitamente, las diversas eulerianas de una función son siempre sus *eulerianas nominales.*

§ 5. — **Las eulerianas como instrumento de cálculo.**

La euleriana de una potencia de la variable, es igual á cero, pues siendo la función dada

$$f(x) = x^m$$

en donde m puede ser entero ó fraccionario, positivo ó negativo, la euleriana valdrá

$$E_1\, x^m = m \,.\, x^m - x \,.\, m \,.\, x^{m-1} = 0.$$

La euleriana de una cantidad constante es igual á cero, según puede comprobarse fácilmente.

Teorema I.—*La euleriana de una suma de varias funciones es igual á la suma de las eulerianas de cada función aumentada en los productos obtenidos, multiplicando cada una de ellas por la diferencia existente entre el grado mayor y el suyo propio.* (Corral.)

Sean las funciones

$$u = f(x) \qquad\qquad v = \varphi(x)$$

de grados respectivos m y n, si bien $m > n$.

La suma de las dos funciones

$$y = u + v = f(x) + \varphi(x)$$

será evidentemente de grado m, por lo cual

$$E_1\, y = E_1 (u + v) = m \,.\, [f(x) + \varphi(x)] - x \,.\, [f'(x) + \varphi'(x)] = m \,.\, f(x) + \\ + n \,.\, \varphi(x) + (m - n) \,.\, \varphi(x) - x \,.\, f'(x) - x \,.\, \varphi'(x).$$

Como además

$$E_1\, u = m \,.\, f(x) - x \,.\, f'(x)$$

$$E_1\, v = n \,.\, \varphi(x) - x \,.\, \varphi'(x)$$

resultará en definitiva

$$E_1 (u + v) = E_1\, u + E_1\, v + (m - n) \,.\, \varphi(x).$$

Para probar que el teorema es general cualquiera que sea el número de funciones, supongámoslo cierto para $(n - 1)$ sumandos y demostremos que también se verifica para uno más.

Sean las n funciones

$$f_1(x), \quad f_2(x), \quad f_3(x) \ldots\ldots f_{n-1}(x), \quad f_n(x)$$

cuyos grados respectivos $m_1, m_2, m_3 \ldots\ldots m_{n-1}, m_n$ satisfacen las desigualdades

$$m_1 > m_2 \qquad m_1 > m_3 \qquad m_1 > m_4 \ldots\ldots m_1 > m_{n-1} \qquad m_1 > m_n$$

La suma total

$$y = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots + f_{n-1}(x) + f_n(x)$$

puede ponerse bajo la forma

$$y = u + f_n(x)$$

haciendo

$$u = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \ldots\ldots + f_{n-1}(x).$$

Como u es de grado m_1 y $f_n(x)$ de grado $m_n < m_1$, tendremos

$$E_1\, y = E_1\, u + E_1\, f_n(x) + (m_1 - m_n) \cdot f_n(x).$$

Verificándose la proposición para las $(n - 1)$ primeras funciones, será

$$E_1\, u = E_1 f_1(x) + E_1 f_2(x) + \ldots\ldots + E_1 f_{n-1}(x) + (m_1 - m_2) f_2(x) + \\ + \ldots\ldots + (m_1 - m_{n-1}) \cdot f_{n-1}(x)$$

y entonces

$$E_1\, y = E_1 f_1(x) + E_1 f_2(x) + E_1 f_3(x) + \ldots\ldots + E_1 f_{n-1}(x) + \\ + E_1 f_n(x) + (m_1 - m_2) \cdot f_2(x) + (m_1 - m_3) \cdot f_3(x) + \ldots\ldots + \\ + (m_1 - m_n) \cdot f_n(x)$$

de conformidad con el enunciado.

Consecuencia de este teorema es la regla práctica que dimos en el número anterior para formular la euleriana de una función entera, pues basta considerar que cada uno de los monomios que la forman, es una función de la variable x, cuya euleriana vale cero.

Teorema II.—*La euleriana de un producto de varias funciones es igual á la suma de los productos que se obtienen multiplicando la euleriana de cada factor por todos los factores restantes.* (Corral.)

Sean las dos funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ de grados m y n, respectivamente; su producto

$$y = f(x) \cdot \varphi(x)$$

es de grado $(m + n)$, por lo cual

$$E_1\ y = f(x) \cdot \varphi(x) \cdot (m + n) - x \cdot \left[f'(x) \cdot \varphi(x) + \varphi'(x) \cdot f(x) \right]$$

pero

$$E_1 f(x) = m \cdot f(x) - x \cdot f'(x)$$
$$E_1\, \varphi(x) = n \cdot \varphi(x) - x \cdot \varphi'(x)$$

así es que

$$E_1\, y = \varphi(x) \cdot E_1 f(x) + f(x) \cdot E_1\, \varphi(x)$$

Demostrado el teorema para el caso de dos factores, se puede comprobar por un sencillo razonamiento, que es cierto también cuando los factores son en número de n.

Ejemplo.—Sea el producto de tres factores,

$$y = (x^5 + 4 . x^2 - 7) . (x^3 - 8 x^2 + 5 x) . (x - 1)$$

cada uno de ellos función entera de la variable x. Las eulerianas respectivas de dichas funciones valen aisladamente

$$E_1 (x^5 + 4 x^2 - 7) = 12 x^2 - 35$$
$$E_1 (x^3 - 8 . x^2 + 5 . x) = - 8 x^2 + 10 . x$$
$$E_1 (x - 1) = - 1$$

luego la euleriana total será

$$E_1 y = (12 x^2 - 35) . (x^3 - 8 x^2 + 5 . x) . (x - 1) + (- 8 . x^2 + 10 . x) . \\ . (x^5 + 4 . x^2 - 7) . (x - 1) - (x^5 + 4 x^2 - 7) . (x^3 - 8 x^2 + 5 . x)$$

y realizando operaciones indicadas obtendremos

$$E_1 y = - 9 . x^8 + 26 . x^7 - 3 x^6 - 144 . x^5 + 224 . x^4 + 258 . x^3 - \\ - 385 . x^2 + 280 \; x$$

Teorema III.—*La euleriana de un determinante cuyos elementos son variables independientes, y tomada dicha euleriana con relación á una de ellas, es igual al mismo determinante en el que se pone cero en lugar de la mencionada variable.* (Corral.)

Siendo los coeficientes de una línea

$$x_1 \; x_2 \; x_3 \ldots\ldots x_n$$

variables independientes, el desarrollo del determinante P por dichos elementos valdrá

$$P = x_1 \chi_1 + x_2 \chi_2 + x_3 . \chi_3 + \ldots\ldots + x_n . \chi_n$$

Tomando eulerianas, con relación á una variable cualquiera, se tendrá

$$E_1^{x_v} \; P = x_1 \chi_1 + x_2 \chi_2 + \ldots\ldots + x_{v-1} . \chi_{v-1} + x_{v+1} . \chi_{v+1} + \ldots . + \\ + x_n . \chi_n$$

y este resultado es, evidentemente, igual á sustituir en el determinante dado la variable x_v por el número 0.

Así por ejemplo la euleriana del determinante

$$P = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$$

tomada con relación á x vale

$$\begin{vmatrix} o & y & z \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7\,z - 2\,y$$

lo cual puede comprobarse fácilmente.

Teorema IV.—*La suma de las eulerianas parciales de un determinante con relación á cada una de las variables independientes, es igual al producto del mismo determinante por su grado disminuído en una unidad.* (Corral.)

Siendo como antes el valor del determinante

$$P = x_1 \cdot \chi_1 + x_2 \cdot \chi_2 + x_3 \cdot \chi_3 + \ldots\ldots + x_n \cdot \chi_n$$

se tendrán las siguientes expresiones para cada una de las eulerianas parciales

$$E_1^{x_1}\ P = x_2 \cdot \chi_2 + x_3\ \chi_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n \cdot \chi_n$$

$$E_1^{x_2}\ P = x_1 \cdot \chi_1 + x_3 \cdot \chi_3 + \ldots\ldots\ldots + x_n \cdot \chi_n$$

$$E_1^{x_3}\ P = x_1 \cdot \chi_1 + x_2 \cdot \chi_2 + \ldots\ldots\ldots + x_n \cdot \chi_n$$

. . . .

$$E_1^{x_n}\ P = x_1 \cdot \chi_1 + x_2 \cdot \chi_2 \cdot + \ldots\ldots\ldots + x_{n-1} \cdot \chi_{n-1}$$

cuyas igualdades dan sumadas

$$E_1^{x_1}\ P + E_1^{x_2}\ P + \ldots\ldots + E_1^{x_n}\ P = (n-1) \cdot x_1 \cdot \chi_1 +$$
$$+ (n-1) \cdot x_2 \cdot \chi_2 + (n-1) \cdot x_3 \cdot \chi_3 + \ldots\ldots + (n-1) \cdot x_n \cdot \chi_n$$

resultado que enunciamos.

La suma de las diversas eulerianas parciales del determinante

$$\begin{vmatrix} x^2 & 2y & z & 4u \\ 1 & -3 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -1 & 6 \\ 7 & 3 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

es igual al mismo multiplicado por tres, según se comprueba realizando su desarrollo.

Teorema V.—*La euleriana de un determinante, en el cual todos sus elementos son funciones de igual grado y de la misma variable, es la suma de los determinantes que se obtienen sustituyendo sucesivamente, en vez de los elementos de sus líneas, las eulerianas de ellos mismos.* (Corral.)

El desarrollo del determinante según sus diversos elementos vale

$$P = \Sigma \pm a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots a_{nn}$$

siendo a_{11} , a_{22} . . . . . a_{nn} funciones todas del mismo grado y de igual variable x.

La euleriana de la suma de estos productos, de grados entre sí iguales, será, según el teorema I, la suma de sus eulerianas, de modo que tendremos en virtud del teorema II

$$\begin{aligned} E_1^x \; P = \Sigma \pm a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots\ldots a_{nn} \cdot E_1^x \, a_{11} + \\ + \Sigma \pm a_{11} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots a_{nn} \cdot E_1^x \, a_{22} + \\ + \Sigma \pm a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots\ldots a_{nn} \cdot E_1^x \, a_{n-1 \, . \, n-1} + \\ + \Sigma \pm a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \ldots a_{n-1 \, . \, n-1} \cdot E_1^x \, a_{n \, . \, n} \end{aligned}$$

cuyo resultado concuerda con el enunciado.

Así la euleriana del determinante de tercer grado vale

$$\begin{vmatrix} E_1 \, a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ E_1 \, a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ E_1 \, a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & E_1 \, a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & E_1 \, a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & E_1 \, a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & E_1 \, a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & E_1 \, a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & E_1 \, a_{33} \end{vmatrix}$$

y de un modo análogo para grados superiores.

Teorema VI.—*La euleriana de la potencia m de una función es igual al producto de dicho exponente por la* $(m - 1)$ *potencia de la función y por la euleriana de la misma.* (Corral.)

Si en efecto

$$y = u^{m-1} = u \, . \, u \, . \, u \, . \ldots . \, u \; (m \text{ veces})$$

la euleriana valdrá

$$\begin{aligned} E_1 \, y = E_1 \, u \, . \, u^{m-1} + E_1 \, u \, . \, u^{m-1} + \ldots\ldots + E_1 \, u \, . \, u^{m-1} = \\ = m \, . \, u^{m-1} \, . \, E_1 \, u \end{aligned}$$

Cuando m en lugar de ser entero sea un número fraccionario

$$m = \frac{p}{q}$$

el teorema es igualmente cierto; pues entonces, de

$$y = u^{\frac{p}{q}}$$

deducimos

$$y^q = u^p$$

é igualando las eulerianas de ambos miembros

$$q \cdot y^{q-1} . E_1 y = p \cdot u^{p-1} . E_1 u$$

de donde

$$E_1 y = \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{y^{q-1}} . E_1 u = \frac{p}{q} \cdot \frac{u^{p-1}}{u^{p-\frac{p}{q}}} . E_1 u = \frac{p}{q} . u^{\frac{p}{q}-1} . E_1 u$$

En el caso de ser m negativo

$$y = u^{-m} = \frac{1}{u^m} \qquad y . u^m = 1$$

por lo que tomando eulerianas

$$u^m . E_1 y + m . u^{m-1} . y . E_1 u = 0$$

luego

$$E_1 y = - m . \frac{y}{u} . E_1 u = - m . u^{-m-1} . E_1 u$$

lo que comprueba la exactitud del teorema, aun en este supuesto.

Teorema VII.—*La euleriana del cociente de dos funciones es igual á la euleriana del dividendo por el divisor, menos la euleriana del divisor por el dividendo, partido todo por el cuadrado del divisor.* (Corral.)

Sea

$$y = \frac{u}{v} \qquad \text{ó} \qquad y . v = u$$

de donde tomando eulerianas

$$v . E_1 y + y . E_1 v = E_1 u$$

por lo cual

$$v . E_1 y = E_1 u - y . E_1 v . = E_1 u - \frac{u}{v} . E_1 v$$

y finalmente, conforme al enunciado

$$E_1 y = \frac{v . E_1 u - u . E_1 v}{v^2}$$

Teorema VIII.—*La euleriana de la raíz de una función es igual al producto de dicha raíz por la euleriana de la función, dividido el resultado por el producto del índice por la función misma.* (Corral.)

Teniendo

$$y = \sqrt[m]{u} \qquad \text{ó} \qquad y^m = u$$

deduciremos

$$m \cdot y^{m-1} \,.\, E_1\, y = E_1\, u$$

por lo que

$$E_1\, y = \frac{E_1\, u}{m \,.\, y^{m-1}} = \frac{E_1\, u}{m \,.\, \dfrac{u}{\sqrt[m]{u}}} = \frac{E_1\, u \,.\, \sqrt[m]{u}}{m \,.\, u}$$

§ 6.—Euleriana de orden ρ de un producto de dos funciones.

Vamos á probar la exactitud de la siguiente fórmula:

$$E_\rho\,(u \,.\, v) = u \,.\, E_\rho\, v + \frac{\rho}{1} \cdot E_1\, u \,.\, E_{\rho-1}\, v + \frac{\rho\,(\rho-1)}{1\,.\,2} \cdot E_2\, u \,.\, E_{\rho-2}\, v +$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{\rho\,(\rho-1)\ldots(\rho-k+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,k}\, E_k\, u \,.\, E_{\rho-k}\, v +$$
$$+ \ldots\ldots \frac{\rho}{1} \cdot E_{\rho-1}\, u \,.\, E_1\, v + v \,.\, E_\rho\, u$$

en donde u y v son dos funciones enteras de la variable x, cuyos grados valen, respectivamente, m y n.

Como la anterior relación es cierta cuando $\rho = 1$, para establecer su generalidad basta demostrar que si se verifica para $(\rho - 1)$ ella subsiste para el número ρ. Á tal fin, en la igualdad supuesta

$$E_{\rho-1}\,(u \,.\, x) = u \,.\, E_{\rho-1}\, v + \frac{\rho-1}{1} \cdot E_1\, u \,.\, E_{\rho-2}\, v +$$
$$+ \frac{(\rho-1)(\rho-2)}{1\,.\,2} \cdot E_2\, u \cdot E_{\rho-3}\, v + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{(\rho-1)(\rho-2)\ldots\ldots(\rho-k)}{1\,.\,2\,\ldots\,k} \cdot E_k\, u \,.\, E_{\rho-k-1}\, v + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{\rho-1}{1} \cdot E_{\rho-2}\, u \,.\, E_1\, v + v \,.\, E_{\rho-1}\, u$$

se tomarán las eulerianas de ambos miembros; y observando que todos los sumandos de que se compone el segundo miembro son de

grado $(m + n - \rho + 1)$ tendremos, según los teoremas I y II del número anterior, que el coeficiente del término $E_k\, u \,.\, E_{\rho-k}\, v$ vale

$$\frac{(\rho-1).(\rho-2).(\rho-3).\ldots\ldots(\rho-k)}{1.2.3.\ldots.k} +$$

$$+ \frac{(\rho-1).(\rho-2).(\rho-3).\ldots.(\rho-k+1)}{1.2\ldots(k-1)} =$$

$$= \rho \,.\, \frac{(\rho-1).(\rho-2)\ldots(\rho-k+1)}{1.2.3\ldots.k}$$

De este modo queda confirmada en todas sus partes la exactitud de la fórmula general para el número ρ.

§ 7.—Expresión de la derivada enesima de una función cuando son conocidas sus n primeras eulerianas.

Por la definición misma de *eulerianas*, podemos escribir inmediatamente

(1) $$E_1 f(x) = m \,.\, f(x) - x \,.\, f'(x)$$

(2) $$E_2 f(x) = (m-1) \,.\, E_1 f(x) - x \,.\, [E_1 f(x)]'$$

(3) $$E_3 f(x) = (m-2) \,.\, E_2 f(x) - x \,.\, [E_2 f(x)]'$$

(4) $$E_4 f(x) = (m-3) \,.\, E_3 f(x) - x \,.\, [E_3 f(x)]'$$

. . . .

De la (1) deducimos

(*a*) $$x \,.\, f'(x) = m \,.\, f(x) - E_1 f(x).$$

Como

$$[E_1 f(x)]' = [m \,.\, f(x) - x \,.\, f'(x)]' = (m-1) \,.\, f'(x) - x \,.\, f''(x)$$

la igualdad (2) se convertirá, con auxilio de la (*a*), en

(*b*) $$x^2 \,.\, f''(x) = m \,.\, (m-1) f(x) - 2 \,.\, (m-1) \,.\, E_1 f(x) + E_2 f(x).$$

De igual manera

$$[E_2 f(x)]' = \Big[(m-1) E_1 f(x) - x \,.\, [E_1 f(x)]'\Big]' = (m-2) \,.\, [E_1 f(x)]' -$$
$$- x \,.\, [(m-2) \,.\, f''(x) - x \,.\, f'''(x)] = (m-1) \,.\, (m-2) \,.\, f'(x) -$$
$$- 2(m-2) \,.\, x \,.\, f''(x) + x^2 \,.\, f'''(x)$$

cuyo valor sustituído su (3) y valiéndonos de las relaciones (a) y (b) nos dará

(*c*) $$x^3 \,.\, f'''(x) = m(m-1) \,.\, (m-2) \,.\, f(x) - 3 \,.\, (m-1) \,.\, (m-2) \,.\, E_1 f(x) +$$
$$+ 3 \,.\, (m-2) \,.\, E_2 f(x) - E_3 f(x) \,.$$

Para calcular $x^4 . f^{IV}(x)$, hallaremos primeramente el valor de

$$[E_3 f(x)]'$$

y después sustituyéndolo en (4), con auxilio de las igualdades (a), (b) y (c), obtendremos

$$(d)\ x^4 \cdot f^{IV}(x) = m(m-1).(m-2).(m-3) f(x) - 4.(m-1).(m-2).(m-3).E_1 f(x) + \\ + 6.(m-2).(m-3).E_2 f(x) - 4.(m-3).E_3 f(x) + E_4 f(x).$$

En general, siendo $f(x)$ una función entera de grado m, podemos escribir

$$x^n . f^{(n)}(x) = m.(m-1).(m-2)....(m-n+1).f(x) - \\ - n.(m-1).(m-2)....(m-n+1).E_1 f(x) + \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(m-2).(m-3)......(m-n+1).E_2 f(x) - \\ - \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.(m-3).(m-4)...(m-n+1).E_3 f(x) + ... \\ + (-1)^\rho . \frac{n(n-1)(n-2).....(n-\rho+1)}{1.2.3...\rho}(m-\rho).(m-\rho-1)(m-n+1).E_\rho f(x) + \\ + ...+(-1)^n.E_n f(x).$$

La generalidad de esta fórmula quedará demostrada probando se verifica para el exponente $(n+1)$ cuando la supongamos cierta para n. Tomando, efectivamente, las derivadas de ambos miembros de dicha igualdad, exacta por hipótesis, tendremos

$$x^n . f^{(n+1)}(x) + n\, x^{n-1} . f^{(n)}(x) = m.(m-1).(m-2)....(m-n+1).f'(x) - \\ - n.(m-1)....(m-n+1).[E_1 f(x)]' + \\ + \frac{n(n-1)}{1.2}(m-2).(m-3)....(m-n+1).[E_2 f(x)]' - \\ - \frac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3}.(m-3).(m-4)....(m-n+1).[E_3 f(x)]' + \\ + ...+(-1)^\rho . \frac{n(n-1).(n-2)....(n-\rho+1)}{1.2.3....\rho.}(m-\rho).(m-\rho-1).....(m-n+1).[E_\rho f(x)]' + \\ + ...+(-1)^n.[E_n f(x)]'$$

pero como

$$f'(x) = \frac{m.f(x) - E_1 f(x)}{x}$$

$$\left[E_1 f(x)\right]' = \frac{(m-1).E_1 f(x) - E_2 f(x)}{x}$$

$$\left[E_2 f(x) \right]' = \frac{(m-2) \, . \, E_2 f(x) \quad E_3 f(x)}{x}$$

. . . .

. . . .

$$\left[E_\rho f(x) \right]' = \frac{(m-\rho) \, . \, E_\rho f(x) - E_{\rho+1} f(x)}{x}$$

podremos sustituir estos valores en la relación última multiplicada por x; así procediendo, se obtendrá:

$$x^{n+1} \, . \, f^{(n+1)}(x) + n \, . \, x^n \, . \, f^{(n)}(x) =$$

$$= m \, . \, (m-1) \, . \, (m-2) \ldots \; (m-n+1) \, . \left[m \, . \, f(x) - E_1 f(x) \right] -$$

$$- n \, . \, (m-1) \, . \, (m-2) \ldots (m-n+1) \, . \left[(m-1) \, . \, E_1 f(x) - E_2 f(x) \right] +$$

$$+ \frac{n \, . \, (n-1)}{1 \, . \, 2} \, . \, (m-2) \ldots \ldots (m-n+1) \, . \left[(m-2) E_2 f(x) - E_3 f(x) \right] - \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^\rho . \frac{n . (n-1) \ldots (n-\rho+1)}{1 . 2 . 3 \ldots \rho} . (m-\rho) . (m-\rho-1) \ldots (m-n+1) . \left[(m-\rho) . E_\rho f(x) - E_{\rho+1} f(x) \right] + \ldots$$

Poniendo en vez de $n \, . \, x^n \, . \, f^n(x)$ su valor supuesto; teniendo en cuenta que

$$\frac{n(n-1)}{1. \, 2} + n = \frac{n \, . \, (n+1)}{1 \, . \, 2} \qquad \frac{n \, . \, (n-1) \, . \, (n-2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \frac{n(n-1)}{1. \, 2} = \frac{(n+1) \, . \, n \, . \, (n-1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3}$$

y en general

$$\frac{n \, . \, (n-1) \, . \, (n-2) \ldots\ldots (n-\rho+1)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots . \, \rho} + \frac{n \, . \, (n-1) \, . \, (n-2) \ldots (n-\rho+2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots . \, (\rho-1)} =$$

$$= \frac{(n+1) \, . \, n \, . \, (n-1) \ldots\ldots (n-\rho+2)}{1 \, . \, 2 \, . \, 3 \ldots . \, \rho}$$

se obtendrá, conforme lo afirmado,

$$x^{n+1} \, . \, f^{n+1}(x) = m \, . \, (m-1) \ldots\ldots (m-n+1) \, . \, (m-n) \, . \, f(x) -$$

$$- (n+1) \, . \, (m-1) \, . \, (m-2) \ldots . \, (m-n) \, . \, E_1 f(x) +$$

$$+ \frac{n \, . \, (n+1)}{1 \, . \, 2} \, . \, (m-2) \, . \, (m-3) \ldots . \, (m-n) \, . \, E_n f(x) - \ldots\ldots +$$

$$+ (-1)^\rho . \frac{(n+1) . n . (n-1) \ldots\ldots (n-\rho+2)}{1 . 2 . 3 \ldots . \rho} . (m-\rho) \ldots (m-n) . E_\rho f(x) + \ldots + (-1)^{n+1} . E_{n+1} f(x)$$

§ 8.—Expresión de la euleriana enesima de una función, cuando son conocidas sus *n* primeras derivadas.

En virtud de las relaciones consignadas en el número anterior, se deduce inmediatamente:

(1) $E_1 f(x) = m \cdot f(x) - x \cdot f'(x)$

(2) $E_2 f(x) = m \cdot (m-1) \cdot f(x) - 2 \cdot (m-1) \cdot x \cdot f'(x) + x^2 \cdot f''(x)$

(3) $E_3 f(x) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot f(x) - 3 \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot x f'(x) + 3 \cdot (m-2) \cdot x^2 \cdot f''(x) - x^3 f'''(x)$

(4) $E_4 f(x) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) f(x) - 4 \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot x \cdot f'(x) + 6 \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot x^2 \cdot f''(x) - 4 \cdot (m-3) \cdot x^3 \cdot f'''(x) + x^4 \cdot f''''(x)$

y en general,

$$\text{(A)} \quad E_n f(x) = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+1) \cdot f(x) - n \cdot (m-1) \cdot (m-2) \ldots (m-n+1) \cdot x \cdot f'(x) + \frac{n(n-1)}{2} \cdot (m-2) \cdot (m-3) \ldots (m-n+1) \cdot x^2 \cdot f''(x) - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (m-3) \cdot (m-4) \ldots (m-n+1) \cdot x^3 \cdot f'''(x) + \ldots + (-1)^\rho \cdot \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-\rho+1)}{1 \cdot 2 \ldots \rho} (m-\rho) \cdot (m-\rho-1) \ldots (m-n+1) \cdot x^\rho \cdot f^{(\rho)}(x) + \ldots + (-1)^n x^n f^{(n)}(x).$$

La exactitud de esta fórmula, cualquiera que sea el valor de n, se demuestra por el mismo razonamiento del artículo anterior, con la diferencia de tomar eulerianas en lugar de derivadas. Todos los términos del segundo miembro de (A) son de grado m, pues $f^{(\rho)}(x)$ es de grado $(m - \rho)$; así es que la euleriana de dicho miembro será la suma de las eulerianas de cada uno de sus términos.

§ 9.—Desarrollo de la función entera $f(x+h)$ conociendo las eulerianas de $f(x)$.

Según la fórmula de Taylor

$$f(x+h) = f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x) + \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x) + \ldots + \frac{h^m}{m!} \cdot f^{(m)}(x)$$

siendo $f(x)$ una función entera y de grado m en la variable x.

Sustituyendo por las diversas derivadas, sus valores

$$f'(x) = \frac{m\,f(x) - E_1 f(x)}{x}$$

$$f''(x) = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,f(x) - 2\,.\,(m-1)\,.\,E_1 f(x) + E_2 f(x)}{x^2}$$

$$f'''(x) = \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\,f(x) - 3\,(m-1)\,.\,(m-2)\,.\,E_1 f(x)\,) +}{x^3}$$

$$\frac{+\,3\,.\,(m-2)\,.\,E_2 f(x) - E_3 f(x)}{x^3}$$

$$f^{(m)}(x) = \frac{m!\,.\,f(x) - m!\,.\,E_1 f(x) + \dfrac{m!}{1\,.\,2}\,.\,E_2 f(x) - \dfrac{m!}{3!}\,.\,E_3 f(x) +}{x^m}$$

$$\frac{+\,\ldots\ldots + (-1)^m\,.\,E_m f(x)}{x^m}$$

encontrados en el § 7, quedará en principio resuelta la cuestión.

Para obtener una fórmula sencilla, sacaremos en el desarrollo así conseguido los siguientes factores comunes;

$$f(x)\,,\ \frac{h}{x}\,.\,E_1 f(x)\,,\quad \frac{1}{1\,.\,2}\,.\,\frac{h^2}{x^2}\,.\,E_2 f(x)\,,\quad \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\frac{h^3}{x^3}\,.\,E_3 f(x)\,\ldots\ldots$$

y teniendo presente que

$$(1+\alpha)^m = 1 + m\,.\,\alpha + \frac{m\,.\,(m-1)}{1\,.\,2}\,.\,\alpha^2 + \frac{m\,.\,(m-1)\,.\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,\alpha^3 + \\ + \ldots\ldots + \alpha^m$$

nos resultará en definitiva

$$f(x+h) = f(x)\,.\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\,\frac{h}{x}\,.\,E_1 f(x) + \\ + \frac{1}{1\,.\,2}\,.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2}.\,\frac{h^2}{x^2}\ E_2 f(x) - \\ - \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\,\frac{h^3}{x^3}\,.\,E_3 f(x) + \ldots\ldots\ldots \pm \\ \pm \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots m}\,.\,\frac{h^m}{x^m}\,.\,E_m f(x)\,.$$

Esta fórmula nos permite definir la euleriana de una función

entera con independencia del conocimiento de su derivada. Así, en efecto, designando por Δy el incremento recibido por $f(x)$ cuando x se transforma en $(x + h)$, tendremos

$$y + \Delta y = f(x + h) = f(x) + \Delta f(x)$$

siendo fácil ahora comprobar que

$$E_1 f(x) = \text{límite de } \frac{f(x) \cdot \left[\left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - 1\right] - \Delta f(x)}{\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x}}$$

cuando el incremento h tiende á valer cero.

§ 10.—Producto de las diversas eulerianas de una función con relación á sus raíces.

Sea la ecuación de grado m

$$(1) \qquad f(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + a_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-1} \cdot x + a_m = 0$$

cuyas raíces, diferentes entre sí, las llamaremos

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots\ldots x_m$$

y por lo cual

$$(2) \qquad f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots\ldots (x - x_m).$$

Tomando en (2) eulerianas con relación á x, se tendrá

$$(a) \qquad E_1 f(x) = - x_1 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots\ldots (x - x_m) - x_2 (x - x_1) \cdot (x - x_3) \ldots (x - x_m) - x_3 (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_4) \ldots (x - x_m) - \ldots\ldots - x_m (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_{m-1})$$

en cuya igualdad, haremos sucesivamente

$$x = x_1, x = x_2, x = x_3 \ldots\ldots\ldots x = x_m$$

obteniendo así

$$E_1 f(x_1) = - x_1 \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_m)$$
$$E_1 f(x_2) = - x_2 \cdot (x_2 - x_1) \ (x_2 - x_3) \ldots\ldots (x_2 - x_m)$$
$$E_1 f(x_3) = - x_3 \cdot (x_3 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \ldots\ldots (x_3 - x_m)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$E_1 f(x_m) = - x_m \cdot (x_m \ \ x_1) \cdot (x_m - x_2) \ldots\ldots\ldots (x_m - x_{m-1})$$

Multipliquemos ordenadamente estas igualdades observando:

1.° Que atendiendo sólo á los primeros factores, el signo del producto total es $(-1)^m$.

2.° Que si existe un factor binomio tal como $(x_1 - x_2)$, habrá también el contrario $(x_2 - x_1)$, valiendo el producto de ambos $-(x_1 - x_2)^2$: circunstancia que repitiéndose para todos los restantes binomios diferentes, dará al producto completo el signo de $(-1)^{\frac{1}{2} m . (m-1)}$

3.° Que en tal virtud, el signo del producto total valdrá

$$(-1)^{\frac{1}{2} . m . (m-1)} . (-1)^m = (-1)^{\frac{1}{2} . m \ (m+1)}$$

por lo que en definitiva

$$E_1 f(x_1) . E_1 f(x_2) . E_1 f(x_3) \ldots\ldots E_1 f(x_m) =$$

(3)
$$= (-1)^{\frac{1}{2} m . (m+1)} . (x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_1 - x_m)^2 \times$$
$$\times (x_2 - x_3)^2 . (x_2 - x_4)^2 \ldots\ldots (x_2 - x_m)^2 \ldots\ldots (x_{m-1} - x_m)^2 . x_1 . x_2 \ldots . x_m$$

Según un teorema análogo de Wandermonde

$$f'(x_1) . f'(x_2) . f'(x_3) \ldots . f'(x_m) =$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2} . m . (m-1)} . (x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_1 - x_m)^2 \times$$
$$\times (x_2 - x_3)^2 . (x_2 - x_4)^2 \ldots\ldots (x_2 - x_m)^2 \ldots\ldots (x_{m-1} - x_m)^2 .$$

obtendremos la igualdad

$$E_1 f(x_1) . E_1 f(x_2) . E_1 f(x_3) \ldots\ldots\ldots E_1 f(x_m) =$$
$$= (-1)^m . x_1 . x_2 \ldots x_m . f'(x_1) . f'(x_2) . f'(x_3) \ldots f'(x_m)$$

transformada en

$$E_1 f(x_1) . E_1 f(x_2) . E_1 f(x_3) \ldots E_1 f(x_m) =$$
$$= a_m . f'(x_1) . f'(x_2) . f'(x_3) \ldots\ldots f'(x_m)$$

si recordamos que

$$(-1)^m . x_1 . x_2 . x_3 \ldots . x_m = a_m .$$

La relación (3) es la que buscábamos.

§ 11. — Sumas de potencias semejantes de las raíces de una ecuación.

La igualdad (a) del número anterior, puede ponerse bajo la siguiente forma

$$E_1 f(x) = -x_1 \cdot \frac{f(x)}{x-x_1} - x_2 \cdot \frac{f(x)}{x-x_2} - x_3 \cdot \frac{f(x)}{x-x_3} - \ldots\ldots - x_m \cdot \frac{f(x)}{x-x_m}$$

Todas estas divisiones indicadas son exactas, pues el residuo de una cualquiera de ellas $\frac{f(x)}{x - x_\alpha}$ es $f(x_\alpha)$, cantidad nula por ser x_α raíz de la ecuación $f(x) = 0$. Efectuando el desarrollo de la primera fracción, tendremos

$$\frac{f(x)}{x-x_1} = x^{m-1} \begin{array}{l|l|l|l|l} + x_1 & x^{m-2} + x_1^2 & x^{m-3} + x_1^3 & x^{m-4} + \ldots\ldots + x_1^{m-1} & x^0 \\ + a_1 & \quad + a_1 . x_1 & \quad + a_1 x_1^2 & \quad + a_1 . x_1^{m-2} & \\ & \quad + a_2 & \quad + a_2 x_1 & \quad + a_2 . x_1^{m-3} & \\ & & \quad + a_3 & \quad + a_3 . x_1^{m-4} & \\ & & & \quad + \ldots & \\ & & & \quad + a_{m-1} & \end{array}$$

luego

$$-x_1 \cdot \frac{f(x)}{x-x_1} =$$

$$= -x_1 . x^{m-1} \begin{array}{l|l|l|l|l} - x_1^2 & x^{m-2} - x_1^3 & x^{m-3} - x_1^4 & x^{m-4} - \ldots\ldots - x_1^m & x^0 \\ - a_1 x_1 & \quad - a_1 x_1^2 & \quad - a_1 x_1^3 & \quad - a_1 \cdot x_1^{m-1} & \\ & \quad - a_2 x_1 & \quad - a_2 \cdot x_1^2 & \quad - a_2 \cdot x_1^{m-2} & \\ & & \quad - a_3 \cdot x_1 & \quad - a_3 \cdot x_1^{m-3} & \\ & & & \quad - \ldots & \\ & & & \quad - a_{m-1} \cdot x_1 & \end{array}$$

Designando por

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} f_1(x) = x + a_1 \\ f_2(x) = x^2 + a_1 x + a_2 \\ f_3(x) = x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{m-1}(x) = x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + a_2 \cdot x^{m-3} + \ldots + a_{m-2} x + a_{m-1} \end{array} \right.$$

el cociente $- x_1 \cdot \frac{f(x)}{x - x_1}$ podrá ponerse bajo la forma siguiente:

$$- x_1 \quad \frac{f(x)}{x - x_1} = - x_1 \cdot x^{m-1} - x_1 \cdot f_1(x_1) \cdot x^{m-2} - x_1 \cdot f_2(x_1) \cdot x^{m-3} -$$
$$- x_1 \cdot f_3(x_1) \cdot x^{m-4} - \ldots \ldots \quad x_1 \cdot f_{m-1}(x_1).$$

Si cambiamos x_1 por x_2 obtendremos el valor de $- x_2 \cdot \frac{f(x)}{x - x_2}$. de un modo análogo hallaremos el de $- x_3 \cdot \frac{f(x)}{x - x_3}$ y así sucesivamente todos los cocientes que integran á $E_1\, f(x)$. Sumando los resultados obtenidos, se encontrará

$$E_1\, f(x) = S\left[-\alpha \cdot \frac{f(x)}{x - \alpha}\right] = S[-x_1] \cdot x^{m-1} +$$
$$+ S[-x_1 \cdot f_1(x_1)] \cdot x^{m-2} + S[-x_1 \cdot f_2(x_1)] \cdot x^{m-3} +$$
$$+ S[-x_1 \cdot f_3(x_1)] \cdot x^{m-4} + \ldots \ldots + S[-x_1 \cdot f_{m-1}(x_1)] \cdot$$

y como por otra parte

$$E_1\, f(x) = a_1 \cdot x^{m-1} + 2 \cdot a_2 \cdot x^{m-2} + 3\, a_3 \cdot x^{m-3} + \ldots \ldots +$$
$$+ (m-1) \cdot a_{m-1}\, x + m \cdot a_m$$

luego deduciremos, igualando los coeficientes de las mismas potencias de x, que

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} S[-x_1] = a_1 \\ S[-x_1 \cdot f_1(x_1)] = 2 \cdot a_2 \\ S[-x_1 \cdot f_2(x_1)] = 3 \cdot a_3 \\ S[-x_1 \cdot f_3(x_1)] = 4 \cdot a_4 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S[-x_1 \cdot f_{m-1}(x_1)] = m \cdot a_m \end{array} \right.$$

Siendo ρ un número cualquiera, la suma

$$s_\rho = x_1^\rho + x_2^\rho + x_3^\rho + \ldots + x_m^\rho$$

es una *función simétrica* de las raíces que puede expresarse racionalmente por medio de los coeficientes de la ecuación dada. En virtud

de las igualdades (1) y de la notación adoptada para representar la suma de las potencias de orden ρ de las raíces, se obtendrá

$$S[-x_1 . f_1(x_1)] = -s_2 - a_1 . s_1$$
$$S[-x_1 . f_2(x_1)] = -s_3 - a_1 . s_2 - a_2 . s_1 .$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S[-x_1 . f_{m-1}(x_1)] = -s_m - a_1 . s_{m-1} -$$
$$- a_2 . s_{m-2} - \ldots\ldots - a_{m-2} . s_2 - a_{m-1} . s_1$$

igualdades que unidas con las (2), dan

$$(3)\quad \begin{cases} a_1 + s_1 = 0 \\ s_2 + a_1 . s_1 + 2 . a_2 = 0 \\ s_3 + a_1 . s_2 + a_2 . s_1 + 3 . a_3 = 0 \\ s_4 + a_1 . s_3 + a_2 . s_2 + a_3 . s_1 + 4 . a_4 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_m + a_1 . s_{m-1} + a_2 . s_{m-2} + a_3 . s_{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-2} . s_2 + \\ \qquad + a_{m-1} . s_1 + m . a_m = 0 \end{cases}$$

que es un sistema determinado de ecuaciones debido á Newton y del cual se deducen los valores de $s_1, s_2, s_3 \ldots\ldots s_m$ en función racional y entera de los coeficientes $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_m$, así como también permiten expresar racionalmente las funciones simétricas elementales $a_1, a_2 \ldots\ldots a_m$ por medio de las sumas s_ρ.

Las funciones simétricas $s_1, . s_2 \ldots\ldots s_m$ pueden calcularse también del modo siguiente: según hemos visto

$$\frac{E_1 f(x)}{f(x)} = -\frac{x_1}{x - x_1} - \frac{x_2}{x - x_2} - \frac{x_3}{x - x_3} - \ldots\ldots - \frac{x_m}{x - x_m}$$

luego á causa de los desarrollos en serie

$$\frac{x_1}{x - x_1} = \frac{x_1}{x} + \frac{x_1^2}{x^2} + \frac{x_1^3}{x^3} + \ldots\ldots + \frac{x_1^m}{x^m} + \ldots\ldots$$
$$\frac{x_2}{x - x_2} = \frac{x_2}{x} + \frac{x_2^2}{x^2} + \frac{x_2^3}{x^3} + \ldots\ldots + \frac{x_2^m}{x^m} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{x_m}{x - x_m} = \frac{x_m}{x} + \frac{x_m^2}{x^2} + \frac{x_m^3}{x^3} + \ldots\ldots + \frac{x_m^m}{x^m} + \ldots\ldots$$

tendremos la igualdad

$$(4)\quad \frac{E_1 f(x)}{f(x)} = -\frac{s_1}{x} - \frac{s_2}{x^2} - \frac{s_3}{x^3} - \frac{s_4}{x^4} - \ldots\ldots - \frac{s_m}{x^m} - \ldots\ldots$$

Haciendo $x = \frac{1}{z}$ y llamando

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} = \frac{\frac{1}{z} \cdot E_1 f\left(\frac{1}{z}\right)}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$$

la relación (4) toma la forma

$$\frac{F_1(z)}{F(z)} = s_1 \cdot z^0 - s_2 \cdot z^1 - s_3 \cdot z^2 - s_4 \cdot z^3 - \ldots - s_m \cdot z^{m-1} \quad \ldots\ldots$$

Realizando el cociente de $F_1(z)$ entre $F(z)$ según las potencias ascendentes de las variables, el coeficiente del término que ocupa el lugar ρ es la suma de las potencias de orden ρ de las raíces de la ecuación dada $f(x) = 0$.

§ 12. — Valor de $\frac{F(x)}{f(x)}$ cuando para $x = a$ se reduce á $\frac{0}{0}$.

Supongamos que el cociente de dos funciones enteras de la variable x tal como

$$\frac{F(x)}{f(x)}$$

tiene el valor indeterminado $\frac{0}{0}$ cuando se haga $x = a$. Deseamos investigar el verdadero valor de dicha fracción haciendo desaparecer la mencionada indeterminación.

Según la fórmula encontrada en § 9, sabemos que

$$F(x+h) = F(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} \cdot E_1 F(x) +$$
$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} \cdot E_2 F(x) - \ldots$$

$$f(x+h) = f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{h}{x} \cdot E_1 f(x) +$$
$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{n-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} \cdot E_2 f(x) - \ldots\ldots$$

siendo m y n los grados respectivos de $F(x)$ y $f(x)$. De aquí la igualdad

$$\frac{F(x+h)}{f(x+h)} = \frac{F(x) \cdot \left(1+\frac{h}{x}\right)^m - \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} \cdot E_1 F(x) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} \cdot E_2 F(x) - \ldots}{f(x) \cdot \left(1+\frac{h}{x}\right)^n - \left(1+\frac{h}{x}\right)^{n-1} \cdot \frac{h}{x} \cdot E_1 f(x) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{x}\right)^{n-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} \cdot E_2 f(x) - \ldots}$$

que se verifica siempre cualquiera que sean los valores de x y de h.

Haciendo $x = a$ y teniendo en cuenta que por hipótesis

$$F(a) = 0 \qquad f(a) = 0$$

obtendremos:

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{-\left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{a} \cdot E_1 F(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot E_2 F(a) - }{-\left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-1} \cdot \frac{h}{a} \cdot E_1 f(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-2} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot E_2 f(a) - }$$

$$\frac{-\frac{1}{1.2.3} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-3} \cdot \frac{h^3}{a^3} \cdot E_3 F(a) + \ldots\ldots}{-\frac{1}{1.2.3} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-3} \cdot \frac{h^3}{a^3} \cdot E_3 f(a) + \ldots\ldots}$$

dividiendo por $\frac{h}{a}$ el numerador y denominador del segundo miembro

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} =$$

$$= \frac{-\left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-1} \cdot E_1 F(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-2} \cdot \frac{h}{a} \cdot E_2 F(a) - }{-\left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-1} \cdot E_1 f(a) + \frac{1}{1.2} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-2} \cdot \frac{h}{a} \cdot E_2 f(a) - }$$

$$\frac{-\frac{1}{1.2.3} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{m-3} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot E_3 F(a) + \ldots\ldots}{-\frac{1}{1.2.3} \cdot \left(1+\frac{h}{a}\right)^{n-3} \cdot \frac{h^2}{a^2} \cdot E_3 f(a) + \ldots\ldots}$$

en donde sustituyendo definitivamente 0 por h se encuentra

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{E_1 F(a)}{E_1 f(a)}$$

Caso de que también

$$E_1 F(a) = 0 \qquad E_1 f(a) = 0$$

entonces el verdadero valor de la fracción sería

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{E_2 F(a)}{E_2 f(a)}$$

Si resultase que las primeras ρ eulerianas de $F(x)$ y $f(x)$ se anulasen simultáneamente para $x = a$, se tendría entonces

$$\frac{F(a)}{f(a)} = \frac{E_{\rho+1}\, F(a)}{E_{\rho+1}\, f(a)}$$

Luego para hallar el verdadero valor de la fracción $\frac{F(x)}{f(x)}$ *que con la cifra* $x = a$ *de la variable toma la forma indeterminada de* $\frac{0}{0}$, *se calcularán las eulerianas simultáneas y sucesivas del numerador y del denominador, poniendo en cada una de ellas a por* x, *hasta llegar á un cociente distinto de* $\frac{0}{0}$, *que será precisamente el valor de la fracción dada.* (Corral.)

La regla anterior puede emplearse, en lugar de la muy conocida de Mr. L'Hospital (véase *Algèbre Supérieure de Comberousse*, páginas 611 á 615), cuando se trata de una fracción cuyo numerador y denominador son funciones racionales de la misma variable.

Ejemplo I. — Sea la fracción

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^5 - 9 \,.\, x^4 + 35 \,.\, x^3 - 74 \;\; x^2 + 84 \,.\, x - 40}{x^6 - 3 \,.\, x^5 - 2 \,.\, x^4 + 6 \,.\, x^3 + 12 \,.\, x^2 - 8 \,.\, x - 16}$$

que toma la forma de $\frac{0}{0}$ cuando x vale 2. Aplicando nuestro procedimiento tendremos

$$\frac{E_1\, F(x)}{E_1\, f(x)} = \frac{-9 \,.\, x^4 + 70 \,.\, x^3 - 222 \,.\, x^2 + 336 \,.\, x \quad 200}{-3 \,.\, x^5 - 4 \,.\, x^4 + 18 \,.\, x^3 + 48 \,.\, x^2 - 40 \,.\, x - 96} =$$

$$= \frac{0}{0} \text{ cuando } x = 2$$

$$\frac{E_2\, F(x)}{E_2\, f(x)} = \frac{70 \,.\, x^3 - 444 \,.\, x^2 + 1008 \,.\, x - 800}{-4 \,.\, x^4 + 36 \,.\, x^3 + 144 \,.\, x^2 - 160 \,.\, x - 480} =$$

$$= \frac{0}{0} \text{ cuando } x = 2$$

$$\frac{E_3\, F(x)}{E_3\, f(x)} = \frac{-444 \,.\, x^2 + 2016 \,.\, x - 2400}{36 \,.\, x^3 + 288 \,.\, x^2 - 480 \,.\, x - 1920} = \frac{144}{-1440} =$$

$$= \frac{1}{10} \text{ cuando } x = 2$$

El verdadero valor de la fracción dada es, pues, $\frac{1}{10}$ · (Véase *Álgebra*, de Sánchez Vidal, tomo II, pág. 131).

Ejemplo II. — Encontrar el valor de la fracción

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{x^3 - 4 . x^2 + 5 . x - 2}{x^4 - 6 . x^3 + 12 . x^2 - 10 . x + 3}$$

cuando $x = 1$. Tomando eulerianas obtendremos

$$\frac{E_1 F(x)}{E_1 f(x)} = \frac{-4 x^2 + 10 . x - 6}{-6 x^3 + 24 . x^2 - 30 . x + 12} = \frac{0}{0} \text{ para } x = 1$$

$$\frac{E_2 F(x)}{E_2 f(x)} = \frac{10 . x - 12}{24 . x^2 - 60 . x + 36} = \frac{-2}{0} = -\infty \text{ para } x = 1$$

así que el verdadero valor de la fracción es $-\infty$, cuando $x = 1$.

Ejemplo III. — Hallar el valor de la expresión

$$\frac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$$

cuando se hace $x = a$. Aplicando nuestro método se calculará la euleriana primera del numerador y la del denominador, encontrándose así

$$lim \frac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \frac{-m . a^m}{-n . a^n} = \frac{m}{n} . a^{m-n}$$

que es el verdadero valor que se buscaba.

§ 13. — Raíces múltiples de una ecuación.

Teorema I. — *La condición necesaria y suficiente para que un número α distinto de cero sea una raíz de orden n de $f(x)$, es que $E_1 f(\alpha)$, $E_2 f(\alpha)$, $E_3 f(\alpha)$ . . . . . $E_{n-1} f(\alpha)$ sean nulas y que $E_n f(\alpha)$ no lo sea también.* (Corral.)

Siendo α una cantidad arbitraria, la fórmula del § 9 nos dará

$$f(x) = f(\alpha) . \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^m - \frac{x-\alpha}{\alpha} \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^{m-1} . E_1 f(\alpha) + $$
$$+ \frac{1}{1 . 2} \frac{(x-\alpha)^2}{\alpha^2} . \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^{m-2} . E_2 f(\alpha) - \qquad (I)$$
$$- \frac{1}{1 . 2 . 3} . \frac{(x-\alpha)^3}{\alpha^3} . \left(1 + \frac{x-\alpha}{\alpha}\right)^{m-3} . E_3 f(\alpha) + \ldots\ldots$$

Si α es raíz de la ecuación dada, entonces $f(\alpha) = 0$ y

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{x - \alpha} = - \frac{1}{\alpha} \cdot \left(1 + \frac{x - \alpha}{\alpha}\right)^{m-1} \cdot E_1 f(\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{1.2} \cdot \frac{(x - \alpha)}{\alpha^2} \cdot \left(1 + \frac{x - \alpha}{\alpha}\right)^{m-2} \cdot E_2 f(\alpha) - \ldots\ldots$$

de donde haciendo $x = \alpha$, se tendrá

$$f_1(\alpha) = - \frac{1}{\alpha} \cdot E_1 f(\alpha).$$

De aquí resulta que si α fuese raíz doble de $f(x)$ y distinta de cero, la función $f_1(x)$ se anulará para $x = \alpha$, luego

$$E_1 f(\alpha) = 0$$

desde el momento que $\alpha \neq 0$.

Si inversamente se supiese que para el número α

$$f(\alpha) = 0 \qquad E_1 f(\alpha) = 0,$$

la fórmula (1) nos demostraría que en tal hipótesis, $f(x)$ es divisible por $(x - \alpha)^2$, lo que indica la duplicidad de la raíz α.

Continuando este razonamiento se comprueba la exactitud del presente teorema.

Teorema II. — *Si las n primeras derivadas de una función se anulan con esta para un cierto valor de la variable* ($x \neq 0$), *también serán iguales á cero las n primeras eulerianas de dicha función.* (Corral.)

Las fórmulas encontradas en el § 8 dando el valor de la euleriana en función de las derivadas, prueban que si para $x = \alpha$ se tiene

$$f(\alpha) = 0 \qquad f'(\alpha) = 0 \qquad f''(\alpha) = 0 \ldots\ldots f^{(n)}(\alpha) = 0$$

también se verificará que

$$f(\alpha) = 0 \qquad E_1 f(\alpha) = 0 \qquad E_2 f(\alpha) = 0 \ldots\ldots E_n f(\alpha) = 0.$$

Recíprocamente si las n primeras eulerianas de una función se anulan como ésta para un cierto valor de $x \neq 0$, *entonces se anularán también sus n primeras derivadas.* (Corral.)

Las igualdades del § 7 comprueban que si para $x = \alpha$ se tiene

$$f(\alpha) = 0 \qquad E_1 f(\alpha) = 0 \qquad E_2 f(\alpha) = 0 \ldots\ldots E_n f(\alpha) = 0$$

también se deducirá que

$$f(\alpha) = 0 \qquad f'(\alpha) = 0 \qquad f''(\alpha) = 0 \ldots\ldots f^{(n)}(\alpha) = 0.$$

Para reconocer si una raíz α de

$$f(x) = 0$$

es múltiple, bastará irla sustituyendo sucesivamente en cada una de las funciones

$$E_1 f(x), \quad E_2 f(x), \quad E_3 f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$$

hasta encontrar la primera que no se anule; si resultare ser $E_\rho f(x)$ entonces la raíz α será de orden ρ. Si la raíz considerada no hiciese cero á ninguna de las eulerianas anteriores, será entonces una raíz sencilla de $f(x) = 0$.

Las raíces múltiples y del orden n de $f(x) = 0$, *son múltiples del orden* $(n - 1)$ en $E_1 f(x) = 0$, pues entonces

$$E_1 f(\alpha) = 0 \qquad E_2 f(\alpha) = 0 \qquad E_3 f(\alpha) = 0 \ldots\ldots E_{n-1} f(\alpha) = 0$$

ó sea que las $(n - 2)$ primeras eulerianas de la ecuación

$$E_1 f(x) = 0$$

se anulan para $x = \alpha$, lo que demuestra es α raíz múltiple del grado $(n - 1)$ de $E_1 f(x) = 0$.

Teorema III.—*Si una ecuación* $f(x) = 0$ *tiene raíces iguales, su primer miembro y su euleriana* $E_1 f(x)$ *tendrán un máximo común divisor igual al producto de los factores binomios correspondientes á las raíces iguales, pero elevados á una potencia igual á la que tienen ellos en la ecuación dada disminuída en una unidad.* (Corral.)

Acabamos de probar que sí α es raíz múltiple de grado n de la ecuación $f(x) = 0$, lo será de grado $(n - 1)$ en $E_1 f(x) = 0$: luego

$$f(x) = (x - a)^n \cdot \varphi(x) \qquad E_1 f(x) = (x - a)^{n-1} \cdot \Psi(x)$$

Como todo factor repetido ρ veces en $f(x)$ lo estará $(\rho - 1)$ veces en $E_1 f(x)$, es consecuencia inmediata que el máximo común divisor de ambas funciones $f(x)$ y $E_1 f(x)$ será igual al producto de los factores lineales múltiples que figuran en $f(x)$ elevados cada uno de ellos á una potencia menor que la suya propia en una unidad.

Deducimos por tanto, que si la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces múltiples, ella y $E_1 f(x)$ serán funciones primas entre sí. De

aquí que cuando se quiera saber si una ecuación tiene raíces iguales, habrá que encontrar el máximo común divisor de la misma y de su euleriana: si este $m \cdot c \cdot d$. resultare ser de primer grado, igualando á cero tal binomio se hallará el valor de x que anula dos veces á $f(x)$.

Cuando el $m \cdot c \cdot d$. encontrado fuese de segundo grado podrá ocurrir que sus dos raíces x_1 y x_2 sean diferentes, y entonces cada una de ellas será raíz doble de $f(x) = 0$; ó bien que $x_1 = x_2$ en cuyo caso este número anulará tres veces á $f(x)$.

Siendo el $m \cdot c \cdot d$. de tercer grado, cuando se iguale á cero nos dará tres raíces x_1, x_2, x_3, con las cuales es posible las siguientes hipótesis:

1.ª Que $x \neq x_2 \neq x_3$ siendo entonces cada una de ellas raíz doble de la ecuación $f(x) = 0$.

2.ª Si dos fuesen iguales $x_1 = x_2$ y la tercera x_3 diferente, entonces x_1 y x_2 serán tres veces raíces de $f(x) = 0$, mientras que x_3 será una raíz doble de la misma ecuación.

3.º Si $x_1 = x_2 = x_3$, la ecuación dada $f(x) = 0$ admitirá una raíz cuádruple é igual á x_1.

Idéntico razonamiento al anterior se aplica cuando el $m \cdot c \cdot d$. encontrado fuese de cuarto grado ó más.

Por simples divisiones algebraicas se pueden encontrar las ecuaciones que contengan sólo las raíces de $f(x) = 0$ con un mismo grado de multiplicidad, es decir, el producto de los factores lineales que figuran en $f(x)$ con un mismo exponente. Sea en efecto,

$$f(x) = X_1 \cdot X_2^2 \cdot X_3^3 \cdot X_3^4$$

la ecuación dada; en la que suponemos para fijar ideas y abreviar, que existen solamente raíces sencillas, dobles, triples y cuádruples; así

X_1 es el producto de los factores lineales simples.
X_2 » » » dobles.
X_3 » » » triples.
X_4 » » » cuádruples.

Designando por $\varphi_1(x)$ el máximo común divisor de $f(x)$ y $E_1 f(x)$, tendremos

$$\varphi_1(x) = X_2 \cdot X_3^2 \cdot X_4^3$$

Hallando el máximo común divisor de $\varphi_1(x)$ y $E_1\varphi_1(x)$ encontraremos la función $\varphi_2(x)$ cuyo valor será

$$\varphi_2(x) = X_3 . X_4^2$$

después de lo cual calcularemos $E_1\varphi_2(x)$ para deducir el $m.c.d.$ de $\varphi_2(x)$ y $E_1\varphi_2(x)$ que nos resultará ser

$$\varphi_3(x) = X_4$$

El $m.c.d.$ de $\varphi_3(x)$ y $E_1\varphi_3(x)$ valdrá evidentemente uno, luego

$$\varphi_4(x) = 1.$$

Realizando inmediatamente las siguientes divisiones

$$\frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \Psi_1(x) = X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4 \qquad \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \Psi_2(x) = X_2 . X_3 . X_4$$

$$\frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = \Psi_3(x) = X_3 \cdot X_4 \qquad \frac{\varphi_3(x)}{\varphi_4(x)} = \Psi_4(x) = X_4$$

encontraremos las funciones $\Psi_1(x)$, $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$, $\Psi_4(x)$ que nos dan el modo de calcular á X_1, X_2, X_3, X_4, pues tenemos

$$\frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)} = X_1 \qquad \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_3(x)} = X_2 \qquad \frac{\Psi_3(x)}{\Psi_4(x)} = X_3 \qquad \Psi_4(x) = X_4$$

cuyas igualdades nos resuelven el problema.

Es digno de observarse que el $m.c.d.$ de $f(x)$ y $E_1 f(x)$ es una función idéntica al $m.c.d.$ de $f(x)$ y $f'(x)$; por lo cual el anterior procedimiento conduce á los mismos resultados que se obtienen operando con $f(x)$ y su derivada.

Ejemplo.—Sea la ecuación de sexto grado

$$f(x) = x^6 - 6 . x^5 + 50 . x^3 - 45 . x^2 - 108 . x + 108 = 0$$

cuyas raíces múltiples se trata de investigar. La euleriana de su primer miembro vale

$$E_1 f(x) = -6 . x^5 + 150 . x^3 - 180 . x^2 - 540 . x + 648$$

ó bien suprimiendo el factor 6 común á todos sus términos

$$E_1 f(x) = -x^5 + 25 . x^3 - 30 . x^2 - 90 . x + 108.$$

El máximo común divisor de $f(x)$ y $E_1 f(x)$ se encontrará ser

$$\varphi_1(x) = x^3 - 4 . x^2 - 3 . x + 18$$

realizando las operaciones sucesivas de división que son conocidas. De aquí que

$$E_1\ \varphi_1(x) = -4x^2 - 6x + 54$$

ó bien

$$E_1\ \varphi_1(x) = -2x^2 - 3x + 27.$$

El mayor divisor mutuo de $\varphi_1(x)$ y $E_1\ \varphi_1(x)$ es

$$\varphi_2(x) = x - 3$$

y como $\varphi_2(x)$ y su euleriana son primas entre sí, se deducirá

$$\varphi_3(x) = 1.$$

Así obtendremos

$$\Psi_1(x) = \frac{f(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{x^6 - 6 \cdot x^5 + 50 \cdot x^3 - 45 \cdot x^2 - 108 \cdot x + 108}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18} =$$
$$= x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

$$\Psi_2(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = \frac{x^3 - 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 18}{x - 3} = x^2 - x - 6$$

$$\Psi_3(x) = \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_3(x)} = \frac{x - 3}{1} = x - 3$$

luego en definitiva

$$X_1 = \frac{\Psi_1(x)}{\Psi_2(x)} = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 6} = x - 1$$

$$X_2 = \frac{\Psi_2(x)}{\Psi_3(x)} = \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = x + 2$$

$$X_3 = \Psi_3(x) = x - 3$$

La ecuación dada es, pues, de la forma

$$(x - 1) \cdot (x + 2)^2 \cdot (x - 3)^3 = 0$$

y tiene una raíz simple igual á 1; una raíz doble igual á — 2; y una raíz triple igual á 3.

§ 14.—Grado de multiplicidad de las raíces comunes de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Teorema I.—*Sean* $f(xy)=0$, $F(xy)=0$ *dos ecuaciones simultáneas y* $F_1(xy)$ *la diferencia* $E_y f(xy) . E_x F(xy) - E_x f(xy) . E_y F(xy)$ *Si las ecuaciones dadas admiten la solución* $x = x_0$, $y = y_0$ *con un grado de multiplicidad* k, *las ecuaciones* $F_1(xy) = 0$, $f(xy) = 0$ *admitirán la misma solución con un grado de multiplicidad precisamente igual á* $k-1$, *salvo el caso de que esta solución pertenezca también á las dos ecuaciones* $E_x f(xy) = 0$, $E_y f(xy) = 0$. *Análogamente las ecuaciones* $F_1(xy) = 0$, $F(xy) = 0$ *admitirán la solución* $x = x_0$, $y = y_0$ *con el grado de multiplicidad* $k-1$, *á menos que las dos ecuaciones* $E_x F(xy) = 0$, $E_y F(xy) = 0$ *no tengan también esta misma solución.* (Corral).

Las dos ecuaciones simultaneas

$$f(xy) = 0 \qquad F(xy) = 0$$

de grados respectivos m y n, pueden ponerse bajo la forma

$$(1) \quad \begin{cases} f(xy) = (x-x_0) . \varphi_1(t) + (x-x_0)^2 . \varphi_2(t) + \ldots\ldots + (x-x_0)^m . \varphi_m(t) \\ F(xy) = (x-x_0) . \Phi_1(t) + (x-x_0)^2 . \Phi_2(t) + \ldots\ldots + (x-x_0)^n . \Phi_n(t) \end{cases}$$

siempre que se haga

$$y - y_0 = t . (x - x_0)$$

Las funciones $\varphi_\rho(t)$, $\Phi_\rho(t)$ son enteras de t, ambas de grado ρ; siendo de observar que

$$\varphi_\rho(t) = 0$$

si $\rho > m$, así como también

$$\Phi_\rho(t) = 0$$

cuando ρ sea mayor que n.

Siendo

$$(2) \quad \psi(xy) = \omega_0(t) + (x-x_0) . \omega_1(t) + (x-x_0)^2 . \omega_2(t) + \ldots\ldots + (x-x_0)^s . \omega_s(t) .$$

una función entera arbitraria de las dos variables x, y con un grado cualquiera s, ordenada de un modo análogo que hicimos con f y F, puede escribirse

(3) $F(xy) - f(xy) . \psi(xy) = (x - x_0) . T_1 + (x - x_0)^2 . T_2 + (x - x_0)^3 . T_3 + \ldots$

haciendo para abreviar

$$T_1 = \Phi_1(t) - \omega_0(t) . \varphi_1(t)$$
$$T_2 = \Phi_2(t) - [\omega_0(t) . \varphi_2(t) + \omega_1(t) . \varphi_1(t)]$$
$$T_3 = \Phi_3(t) - [\omega_0(t) . \varphi_3(t) + \omega_1(t) . \varphi_2(t) + \omega_2(t) . \varphi_1(t)]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si en las funciones $f(xy)$ y $F(xy)$ se dispone de constantes arbitrarias, podemos hacer que ellas en unión con las de $\psi(xy)$ verifiquen las identidades

(a) $\quad T_1 = 0 \qquad T_2 = 0 \qquad T_3 = 0 \ldots\ldots T_{k-1} = 0$

en cuyo caso la igualdad (3) se convierte en

(4) $$F(xy) - f(xy) . \psi(xy) = (x - x_0)^k . T_k + \\ + (x - x_0)^{k+1} . T_{k+1} + (x - x_0)^{k+2} . T_{k+2} + \ldots$$

Para que el sistema de valores $x = x_1$, $y = y_1$ sea una solución común de las ecuaciones dadas, será preciso que el segundo miembro de la primera fórmula (1) y el de la fórmula (4) se reduzcan á cero para $x = x_1$ y $t = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$: ambos valores de x y t satisfarán las dos ecuaciones

$$\varphi_1(t) + (x - x_0) . \varphi_2(t) + (x - x_0)^2 . \varphi_3(t) + \ldots\ldots = 0$$
$$T_k + (x - x_0) . T_{k+1} + (x - x_0)^2 . T_{k+2} + \ldots\ldots = 0$$

Cuando los valores x_1, y_1 tiendan hacia los límites x_0, y_0, las dos condiciones anteriores se transforman en

$$\varphi_1(t) = 0 \qquad\qquad T_k = 0$$

cuyas dos ecuaciones deberán ser satisfechas por el mismo valor de t, que es á su vez el límite de la relación $\dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ cuando y_1, x_1 tienden, respectivamente, hacia y_0, x_0.

Como T_k encierra el término $\omega_{k-1}(t) . \varphi_1(t)$ en el cual $\omega_{k-1}(t)$ es indeterminado por cuanto las condiciones (a) no lo comprenden, es evidente que se podrá disponer de $\omega_{k-1}(t)$ para hacer que T_k sea una constante diferente de cero, ó para que al contrario T_k sea idén-

ticamente nula; en el segundo caso se aumentará en una unidad el grado de multiplicidad de la solución (x_0, y_0). Nosotros supondremos que se ha elegido $\omega_{k-1}(t)$ de tal modo que $T_k \neq 0$ permanezca constante.

Sustituyendo en el segundo miembro de (4) la variable t por su valor $\frac{y - y_0}{x - x_0}$, se tendrá

$$F(x\,y) - f(x\,y) \cdot \psi(x\,y) = \chi(x\,y) \tag{5}$$

siendo $\chi(x\,y)$ un polinomio de la forma

$$\chi(x\,y) = A \cdot (x - x_0)^k + \Sigma A_{p\,.\,q} \cdot (x - x_0)^p \cdot (y - y_0)^q \tag{6}$$

en donde A es una constante lo mismo que las $A_{p\,.\,q}$: la suma aquí indicada comprende un número limitado de términos en los cuales $p + q$ es mayor que k.

Siendo $\psi(x\,y)$ de grado s, las eulerianas parciales con relación á x é y en ambos miembros de (5) nos darán, si $n + s > m$

(7) $$E_x F(x\,y) - \psi(x\,y) \cdot E_x f(x\,y) - f(x\,y) \cdot E_x \psi(x\,y) + (n + s - m) \cdot F(x\,y) = E_x \chi(x\,y)$$

(8) $$E_y F(x\,y) - \psi(x\,y) \cdot E_y f(x\,y) - f(x\,y) \cdot E_y \psi(x\,y) + (n + s - m) \cdot F(x\,y) = E_y \chi(x\,y).$$

Como s es un número arbitrario, claro está que puede elegirse siempre lo suficientemente grande para que se verifique en todos los casos $n + s > m$.

Haremos para abreviar

$$F_1(x\,y) = E_x F(x\,y) \cdot E_y f(x\,y) - E_x f(x\,y) \cdot E_y F(x\,y)$$
$$\psi_1(x\,y) = E_x \psi(x\,y) \cdot E_y f(x\,y) - E_y \psi(x\,y) \cdot E_x f(x\,y)$$
$$\chi_1(x\,y) = E_x \chi(x\,y) \cdot E_y f(x\,y) - E_y \chi(x\,y) \cdot E_x f(x\,y)$$
$$\theta(x\,y) = \psi_1(x\,y) - (n + s - m) \cdot \psi(x\,y) \cdot [E_y f(x\,y) - E_x f(x\,y)]$$
$$\chi_2(x\,y) = \chi_1(x\,y) - (n + s - m) \cdot \chi(x\,y) \cdot [E_y f(x\,y) - E_x f(x\,y)]$$

Multiplicando ahora las igualdades (7) y (8) respectivamente por $+ E_y f(x\,y)$ y $- E_x f(x\,y)$, obtendremos sumando ambos resultados

(9) $$F_1(x\,y) - f(x\,y) \cdot \theta(x\,y) = \chi_2(x\,y).$$

Los términos de primer grado en $x - x_0$ é $y - y_0$ de $f(x\,y)$

tienen por suma $(x - x_0) \cdot \varphi_1(t)$; como $\varphi_1(t)$ es de primer grado en t, será de la forma

$$\varphi_1(t) = a\,t + b$$

donde b puede ser cero, pero nunca $a = 0$, pues así lo hemos supuesto desde un principio. La euleriana parcial $E_y\, f(x\,y)$ contiene el término $b\,.\,(x - x_0) - a\,.\,y_0$ que podrá en ocasiones reducirse á $-a\,.\,y_0$; como por otra parte la euleriana $E_x\,\chi(x\,y)$ posee el término $-k\,.\,A\,.\,(x - x_0)^{k-1}\,.\,x_0$ resultará en definitiva que $\chi_1(x\,y)$ y por tanto $\chi_2(x\,y)$ tiene un término $k\,.\,a\,.\,x_0\,.\,y_0\,.\,A\,.\,(x - x_0)^{k-1}$ de grado $k - 1$ en la variable $x - x_0$, mientras que los restantes son de grado superior á $k - 1$. La función $\chi_2(x\,y)$ tendrá, pues, la forma

$$\text{(10)} \qquad \chi_2(x\,y) = H\,.\,(x - x_0)^{k-1} + \Sigma\, H_{p\,.\,q}\,.\,(x - x_0)^p\,.\,(y - y_0)^q$$

en donde H y $H_{p\,.\,q}$ son constantes, valiendo $p + q$ más que $k - 1$.

Las fórmulas (9) y (10) demuestran que $(x_0\,,\,y_0)$ es una solución múltiple de grado $k - 1$ para las dos ecuaciones

$$F_1(x\,y) = 0 \qquad\qquad f(x\,y) = 0$$

Este resultado permanece cierto siempre que $\varphi_1(t)$ sea diferente de cero. Pero cuando se tenga idénticamente

$$\varphi_1(t) = 0$$

entonces

$$f(x\,y) = (x - x_0)^2\,.\,\varphi_2(t) + (x - x_0)^3\,.\,\varphi_3(t) + (x - x_0)^4\,.\,\varphi_4(t) + \ldots\ldots$$

no pudiéndose mantener la precedente conclusión, pues en tal caso las dos ecuaciones

$$E_x\, f(x\,y) = 0 \qquad\qquad E_y\, f(x\,y) = 0$$

admiten también la solución $x = x_0\,,\, y = y_0$, según puede comprobarse fácilmente.

Como nada distingue á la ecuación $f(x\,y) = 0$ de la $F(x\,y) = 0$ de aquí que la solución $x = x_0\,,\, y = y_0$ satisfará $k - 1$ veces al sistema

$$F_1(x\,y) = 0 \qquad\qquad F(x\,y) = 0$$

salvo el caso de que las dos ecuaciones

$$E_x F(x\,y) = 0 \qquad E_y F(x\,y) = 0$$

admitan también dicha solución.

Queda así demostrado que una solución múltiple del sistema

$$f(x\,y) = 0 \qquad F(x\,y) = 0$$

satisface necesariamente la ecuación

$$E_x F(x\,y) \cdot E_y f(x\,y) - E_x\, f(x\,y) \cdot E_y F(x\,y) = 0\,.$$

El presente teorema comprende como caso particular la proposición del número anterior relativa á las raíces múltiples de las ecuaciones con una sola incógnita, pues basta aplicarlo al sistema

$$f(x) = 0 \qquad y = 0$$

en el cual la primera ecuación tiene k raíces iguales á x_0; entonces, según queda probado

$$F_1(x\,y) = E_1 f(x) = 0$$

admitirá $k - 1$ raíces iguales á x_0.

§ 15.—**Descomposición de una fracción racional.**

Trataremos el caso de que las raíces de la función que hace las veces de denominador sean todas diferentes entre sí. Sea esta función

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x \quad x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots\ldots (x - x_m) \qquad \textbf{(1)}$$

y hagamos

$$\textbf{(2)} \begin{cases} f_1(x) = -x_1 \cdot \dfrac{f(x)}{x - x_1} = -x_1 (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots (x - x_m) \\ f_2(x) = -x_2 \cdot \dfrac{f(x)}{x - x_2} = -x_2 \cdot (x \quad x_1) \cdot (x - x_3) \cdot \ldots\ldots (x - x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x) = -x_m \cdot \dfrac{f(x)}{x - x_m} = -x_m \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots (x - x_{m-1}) \end{cases}$$

Recordando fórmulas ya establecidas veremos que

$$\textbf{(3)} \begin{cases} f_v(x_v) = E_1 f(x_v) \\ f_v(x_\mu) = 0 \end{cases}$$

siendo v y μ dos índices diferentes entre los números 1, 2, 3 .... m.

Suponiendo que A_1, A_2, A_3 ..... A_m sean los valores particulares que toma una cierta función $\varphi(x)$ de grado $(m-1)$ cuando en vez de la variable x se sustituye sucesivamente las cantidades x_1, x_2, x_3 ..... x_m, podremos deducir que

$$(4) \qquad \varphi(x) = A_1 \cdot \frac{f_1(x)}{E_1 f(x_1)} + A_2 \cdot \frac{f_2(x)}{E_1 f(x_2)} + \ldots\ldots + A_m \cdot \frac{f_m(x)}{E_1 f(x_m)}.$$

pues efectivamente, para $x = x_v$ la igualdad última en virtud de las relaciones (3) se reduce á

$$\varphi(x_v) = A_v.$$

Sustituyendo en (4) los valores (2) obtendremos

$$(5) \qquad \frac{\varphi(x)}{f(x)} = -\frac{x_1 \cdot \varphi(x_1)}{(x-x_1) \cdot E_1 f(x_1)} - \frac{x_2 \cdot \varphi(x_2)}{(x-x_2) \cdot E_1 f(x_2)} - \ldots\ldots - \frac{x_m \cdot \varphi(x_m)}{(x-x_m) \cdot E_1 f(x_m)}$$

en donde $\varphi(x)$ es una función cualquiera de grado igual ó inferior á $(m-1)$.

Cuando se tenga una función $\Phi(x)$ de grado superior á m, podremos entonces poner

$$\Phi(x) = Q.f(x) + \varphi(x)$$

siendo Q una función entera y $\varphi(x)$ de grado $(m-1)$ como máximo: de aquí deducimos que

$$\Phi(x_v) = \varphi(x_v)$$

por lo cual

$$(6) \qquad \frac{\Phi(x)}{f(x)} = Q - \frac{x_1 \cdot \Phi(x_1)}{(x-x_1) \cdot E_1 f(x_1)} - \frac{x_2 \cdot \Phi(x_2)}{(x-x_2) \cdot E_1 f(x_2)} - \ldots\ldots - \frac{x_m \cdot \Phi(x_m)}{(x-x_m) \cdot E_1 f(x_m)}$$

que nos da la descomposición de la fracción racional $\frac{\Phi(x)}{f(x)}$ en una suma de fracciones simples con numerador constante y denominador compuesto de una función lineal de x.

Haciendo en (5) $\varphi(x) = x^n$ con la condición $n < m$, y suponiendo que todas las raíces x_1, x_2, x_3 ..... x_m de $f(x) = 0$ sean diferentes de cero, encontraremos, después de sustituir x por cero, que

$$(7) \quad \frac{x_1^n}{E_1 f(x_1)} + \frac{x_2^n}{E_1 f(x_2)} + \cdots \frac{x_m^n}{E_1 f(x_m)} = 0 \; [n = 0, 1, 2, 3 \ldots m - 1].$$

Si suponemos

$$\Phi(x) = x^m$$

se puede usar la fórmula (6) á condición de ser $Q = 1$ y entonces obtendremos

$$(8) \quad \frac{x_1^m}{E_1 f(x_1)} + \frac{x_2^m}{E_1 f(x_2)} + \cdots + \frac{x_m^m}{E_1 f(x_m)} = -1.$$

Las fórmulas (7) y (8) permanecen exactas aun cuando alguna de las raíces x_v sea nula y siempre que n sea positivo.

Para $n = 0$ la igualdad (7) se convierte en

$$(9) \quad \frac{1}{E_1 f(x_1)} + \frac{1}{E_1 f(x_2)} + \cdots + \frac{1}{E_1 f(x_m)} = 0.$$

Aplicando las relaciones (7) y (8) á las funciones $f_k(x)$ definidas en el § 11 encontraremos

$$(10) \quad \begin{cases} S\left[\dfrac{f_k(x)}{E_1 \; f(x)}\right] = 0 & k = 0, 1, 2, 3 \ldots (m - 1). \\ S\left[\dfrac{x \cdot f_{m-1}(x)}{E_1 \; f(x)}\right] = -1 & \end{cases}$$

Entre las funciones $f_k(x)$ y $f_{k-1}(x)$ se realiza la igualdad

$$f_k(x) - x \cdot f_{k-1}(x) = a_k$$

de donde

$$x^{\mu-1} \cdot f_k(x) - x^{\mu} \cdot f_{k-1}(x) = a_k \cdot x^{\mu-1} \qquad (\mu < m)$$

luego en virtud de (7) deducimos

$$(11) \quad S\left[\frac{x^{\mu-1} \cdot f_k(x)}{E_1 f(x)}\right] = S\left[\frac{x^{\mu} \cdot f_{k-1}(x)}{E_1 f(x)}\right] \qquad (\mu < m).$$

A causa de las relaciones (10) es fácil encontrar que

$$(12) \quad \begin{cases} S\left[\dfrac{x^{\mu} \cdot f_k(x)}{E_1 f(x)}\right] = 0 & \text{cuando } \mu + k < m \\ S\left[\dfrac{x^{\mu} \cdot f_k(x)}{E_1 f(x)}\right] = -1 & \text{cuando } \mu + k = m \end{cases}$$

Estas fórmulas son exactas aun cuando el coeficiente de la más alta potencia de x en $f(x)$ no sea igual á 1.

Como en virtud de reglas elementales

$$-\frac{\alpha}{x-\alpha}=1+\frac{x}{\alpha}+\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{x^3}{\alpha^3}+\dots\dots$$

la igualdad (6) se convertirá, después de sustituir á $-\dfrac{x_i}{x-x_i}$ por su desarrollo, en

$$\text{(13)}\qquad \frac{\Phi(x)}{f(x)}=Q+\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{E_1 f(x_i)}+x.\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{x_i.E_1 f(x_i)}+$$

$$+x^2.\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{x_i^2.E_1 f(x_i)}+\dots\dots$$

Como caso particular notable, hagamos $\Phi(x)=E_1 f(x)$; entonces $Q=0$ y designando por

$$S^{(n)}=\frac{1}{x_1^n}+\frac{1}{x_2^n}+\frac{1}{x_3^n}+\dots\dots+\frac{1}{x_m^n}$$

los coeficientes $c_0, c_1, c_2 \dots\dots c_n \dots\dots$ de $x^0, x^1, x^2 \dots\dots x^n \dots\dots$ en el desarrollo en serie anterior, valdrán

$$c_0=\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{E_1 f(x_i)}=n \qquad c_1=\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{x_i.E_1 f(x_i)}=S^{(1)}$$

$$c_2=\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{x_i^2.E_1 f(x_i)}=S^{(2)} \qquad c_3=\sum_{1.m}^{i}\frac{\Phi(x_i)}{x_i^3.E_1 f(x_i)}=S^{(3)}\dots\dots$$

CAPÍTULO III

Límites del valor y del número de las raíces.

---

§ 16. — Valores límites de las raíces reales de una ecuación.

Teorema I.—*Se obtiene un límite inferior de las raíces positivas de una ecuación buscando un número que haga positivas á $f(x)$ y á todas sus eulerianas.* (Corral.)

Demostremos ante todo, que es límite inferior de las raíces positivas de una ecuación un número cualquiera que haciendo á $f(x)$ positiva goce de la propiedad de que otro número positivo inferior á él, tenga también la cualidad de hacer á $f(x) > 0$.

Sea, en efecto, α un número positivo tal que

$$f(\alpha) > 0 \qquad f(\alpha - h) > 0$$

y $\alpha - h > 0$; decimos que α es menor que todas las raíces positivas de $f(x) = 0$. Pues, si al contrario, existiese una raíz positiva a tal que $\alpha > a$, entonces, como ambos números son positivos, podemos buscar siempre otro $h < \alpha$ que satisfaga la igualdad $\alpha - h = a$; en cuyo caso, por ser $f(a) = 0$ tendríamos también $f(\alpha - h) = 0$, lo que es imposible, pues por hipótesis $f(\alpha - h) > 0$. Tampoco puede ocurrir que $\alpha = a$, porque deduciríamos contra lo supuesto, que $f(\alpha) = f(a) = 0$, siendo realmente $f(\alpha) > 0$.

Según fórmula demostrada

$$f(x+h)=f(x).\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - E_1 f(x).\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\frac{h}{x}+$$

$$+\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2}.\frac{1}{1.2}.\frac{h^2}{x^2}.E_2 f(x) - \frac{1}{1.2.3}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\frac{h^3}{x^3}.E_3 f(x)+$$

$$+\ldots\ldots+(-1)^m.\frac{1}{1.2\ldots m}.\frac{h^m}{x^m}.E_m f(x)$$

la que se transforma, cambiando h en $-h$, á la que sigue

$$f(x-h)=f(x).\left(1-\frac{h}{x}\right)^m + E_1 f(x).\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\frac{h}{x}+$$

$$+\frac{1}{1.2}.\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-2}.\frac{h^2}{x^2}.E_2 f(x)+\frac{1}{1.2.3}.\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\frac{h^3}{x^3}.E_3 f(x)+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{1}{1.2.3\ldots m}.\frac{h^m}{x^m}.E_m f(x).$$

Suponiendo $\alpha - h > 0$, $\alpha > 0$, $h > 0$, por la igualdad última se comprueba que si las funciones

$$f(\alpha),\ E_1 f(\alpha),\ E_2 f(\alpha)\ldots\ldots E_m f(\alpha)$$

son todas positivas, entonces $f(\alpha - h)$ también lo es, luego deducimos que α es un límite inferior de las raíces positivas de $f(x)=0$.

Es de utilidad en las aplicaciones prácticas de esta regla, observar que si un número $\alpha > 0$ hace positivas á $E_n f(x)$ y á todas las otras eulerianas de orden superior, cualquiera número $\alpha - h > 0$ donde $h > 0$, hará también positiva á dicha función $E_n f(x)$.

Tenemos en efecto

$$E_n f(\alpha - h) = E_n f(\alpha).\left(1-\frac{h}{\alpha}\right)^{m-n}+$$

$$+\frac{h}{\alpha}.\left(1-\frac{h}{\alpha}\right)^{m-n-1}.E_{n+1} f(\alpha)+\frac{1}{1.2}.\frac{h^2}{\alpha^2}.\left(1-\frac{h}{\alpha}\right)^{m-n-2}.E_{n+2} f(\alpha)+\ldots$$

y siendo por hipótesis

$$\alpha > h, \qquad \alpha > 0, \qquad h > 0, \qquad 1-\frac{h}{\alpha} > 0$$

$$E_n f(\alpha) > 0 \qquad E_{n+1} f(\alpha) > 0 \qquad E_{n+2} f(\alpha) > 0 \ldots\ldots E_m f(\alpha) > 0$$

resultará, conforme afirmamos, que $E_n f(\alpha - h) > 0$.

Para aplicar este teorema se comenzará por convertir en positivo el término independiente de la ecuación, lo que se conseguirá, cuan-

do sea necesario, cambiando de signo á todos los términos de la función: esta modificación no altera ni á la ecuación dada ni á sus raíces y tiene la ventaja de que escritas las eulerianas según las potencias ascendentes de la variable, el primer término de cada una de ellas será siempre positivo, por lo cual, haciendo decrecer á la variable x podremos encontrar con facilidad un valor tal que dicha euleriana tenga el mismo signo positivo que su término independiente. De este modo será posible siempre encontrar un número positivo que haga positivas á todas las eulerianas de $f(x)$. No procediendo así podría llegarse á una euleriana que fuese negativa para todos los valores de la variable y sería aparentemente inaplicable la presente regla.

Con la observación anterior y en vista de que $E_m f(x)$ es una cantidad positiva, habrá que buscar un número que haga á $E_{m-1} f(x) > 0$. Cuestión fácil, ya que $E_{m-1} f(x)$ es de la forma $a x + b$; pues si $a > 0$, entonces $x = 0$ la hará positiva, y caso de que $a < 0$ tomaremos un número menor que $-\frac{b}{a}$. Así determinada la cifra que hace á $E_m f(x)$ y $E_{m-1} f(x)$, positivas, la sustituiremos en $E_{m-2} f(x)$ que es función de segundo grado; si el resultado fuese negativo, adoptaremos números menores hasta conseguir que $E_{m-2} f(x) > 0$. De igual manera se continuará operando con las eulerianas restantes.

Supongamos dada la ecuación

$$f(x) = x^3 - 15 \cdot x^2 + 68 \cdot x - 84 = 0$$

en la cual el término independiente es negativo; cambiando el signo se tendrá

$$f(x) = 84 - 68\,x + 15\,x^2 - x^3 = 0$$
$$E_1 f(x) = 252 - 136\,x + 15\,x^2$$
$$E_2 f(x) = 504 - 136\,x$$

Aquí vemos que $E_2 f(1) > 0$, así como también $E_1 f(1) > 0$ y $f(1) > 0$, luego deducimos que 1 es límite inferior de las raíces positivas de la ecuación dada.

Teorema II. — *Se obtiene un límite superior de las raíces positivas de una ecuación buscando un número α que haga positivas á las*

funciones $f(x), -E_1 f(x), E_2 f(x), -E_3 f(x) \ldots (-1)^m . E_m f(x)$. (Corral.)

La fórmula establecida

$$f(\alpha + h) = \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^m . f(\alpha) - \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^{m-1} . \frac{h}{\alpha} . E_1 f(\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{1 . 2} . \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^{m-2} . \frac{h^2}{\alpha^2} . E_2 f(\alpha) - \frac{1}{1 . 2 . 3} . \left(1 + \frac{h}{\alpha}\right)^{m-3} . \frac{h^3}{\alpha^3} . E_3 f(\alpha) +$$
$$+ \ldots\ldots + (-1)^m . \frac{1}{1 . 2 \ldots\ldots m} . \frac{h^m}{\alpha^m} . E_m f(\alpha) .$$

nos demuestra que si el número α reúne las condiciones indicadas, otro número cualquiera $\alpha + h$ que le sea superior hará positiva á $f(x)$; luego α es efectivamente un límite superior de las raíces positivas de la ecuación dada.

Antes de aplicar esta regla habrá que hacer positivo al término independiente de la ecuación si m es par, y negativo cuando m sea número impar.

Teorema III. — *Un límite superior de las raíces negativas de una ecuación se consigue buscando un número* $+\alpha$ *positivo que haga positivas á las funciones* $f(-x), E_1 f(-x), E_2 f(-x) \ldots\ldots E_m f(-x)$. (Corral.)

La conocida relación

$$f(-\alpha + h) = \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^m . f(-\alpha) + \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^{m-1} . \frac{h}{\alpha} . E_1 f(-\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{1 . 2} . \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^{m-2} . \frac{h^2}{\alpha^2} . E_2 f(-\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{1 . 2 . 3} . \left(1 - \frac{h}{\alpha}\right)^{m-3} . \frac{h^3}{\alpha^3} . E_3 f(-\alpha) + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{1}{1 . 2 . 3 \ldots m} . \frac{h^m}{\alpha^m} . E_m f(-\alpha)$$

nos prueba que si el número $+\alpha$ satisface las condiciones enunciadas, como $-\alpha + h < 0$ de donde $1 - \frac{h}{\alpha} > 0$, deducimos que $f(-\alpha + h)$ para otro número negativo mayor que $-\alpha$, será siempre positivo, luego $-\alpha$ es límite superior de las raíces negativas de la ecuación dada.

Teorema IV.— *Un límite inferior de las raíces negativas de una ecuación se obtiene encontrando un número* $+\alpha$ *positivo que haga positivas á las funciones* $f(-x)$, $-E_1 f(-x)$, $E_2 f(-x)$, $-E_3 f(-x), \ldots\ldots (-1)^m E_m f(-x)$. (Corral.)

El desarrollo

$$f(-\alpha - h) = \left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^m . f(-\alpha) - \left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{m-1} . \frac{h}{\alpha} . E_1 f(-\alpha) +$$
$$+ \frac{1}{1.2} . \left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{m-2} . \frac{h^2}{\alpha^2} . E_2 f(-\alpha) -$$
$$- \frac{1}{1.2.3} . \left(1+\frac{h}{\alpha}\right)^{m-3} . \frac{h^3}{\alpha^3} . E_3 f(-\alpha) + \ldots (-1)^m . \frac{1}{1.2\ldots m} . \frac{h^m}{\alpha^m} . E_m f(-\alpha)$$

demuestra el teorema enunciado, ya que siendo $-\alpha - h < 0$ entonces $1+\frac{h}{\alpha} > 0$ y en definitiva $f(-\alpha - h) > 0$.

Á estos dos últimos teoremas es aplicable la observación anterior relativa á la necesidad de preparar la ecuación dada á fin de que el término independiente de la variable tenga el signo conveniente á la investigación que se realiza.

Estas cuatro reglas para encontrar los límites extremos de las raíces positivas y negativas de una ecuación, son semejantes á las dadas por Newton empleando las derivadas de la función dada.

Ejemplo I.—Séase la ecuación

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 1 = 0$$

cuyo límite superior de las raíces positivas queremos encontrar. Aplicando el teorema II tendremos

$$f(x) = x^4 - 4 . x^3 + 3 . x^2 - x + 1$$
$$-E_1 f(x) = 4 . x^3 - 6 . x^2 + 3 . x - 4$$
$$E_2 f(x) = 6 . x^2 - 6 . x + 12$$
$$-E_3 f(x) = 6 . x - 24$$
$$E_4 f(x) = 24$$

Es fácil comprobar que el número 4 hace positivas á todas las funciones anteriores, lo que nos indica que 4 es el límite buscado.

Ejemplo II.—Dada la ecuación

$$x^5 + 3x^3 - x^2 + 6x + 10 = 0$$

deseamos hallar un límite superior de sus raíces negativas. Aplicando nuestro teorema III resultará

$$f(-x) = -x^5 - 3 \,.\, x^3 - x^2 - 6 \,.\, x + 10$$
$$E_1 f(-x) = -6 \,.\, x^3 - 3 \,.\, x^2 - 24 \,.\, x + 50$$
$$E_2 f(-x) = -6 \,.\, x^3 - 6 \,.\, x^2 - 72 \,.\, x + 200$$
$$E_3 f(-x) = -6 \,.\, x^2 - 144 \,.\, x + 600$$
$$E_4 f(-x) = -144 \,.\, x + 1200$$
$$E_5 f(-x) = 1200$$

y como 0 . 9 hace positivas á todas las anteriores funciones, deduciremos que — 0 . 9 es el límite superior de las raíces negativas.

La ecuación clásica

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

nos da

$$f(-x) = -x^3 + 7x + 7$$
$$E_1 f(-x) = 14x + 21$$
$$E_2 f(-x) = 14x + 42$$
$$E_3 f(-x) = 42$$

Sustituyendo en estas funciones en vez de x la serie natural de números 0, 1, 2, 3 . . . . . veremos que el mayor de ellos que las hace á todas positivas es 3; luego queda investigado que — 3 es un límite superior de las raíces negativas de la ecuación propuesta.

Ejemplo III.—Para aplicar nuestro teorema IV á la ecuación

$$x^3 + 6x^2 + 11 \,.\, x + 6 = 0$$

es necesario prepararla previamente cambiando de signos á los términos de su primer miembro; así haremos

$$f(+x) = -x^3 - 6 \,.\, x^2 - 11 \,.\, x - 6$$

luego se deducirá

$$f(-x) = x^3 - 6x^2 + 11 \,.\, x - 6$$
$$-E_1 f(-x) = 6x^2 - 22x + 18$$
$$E_2 f(-x) = 22 \,.\, x - 36$$
$$-E_3 f(-x) = 36$$

Sustituyendo en estas funciones la serie natural 0, 1, 2, 3, 4. . . . . de números, veremos que el primero de ellos que las hace positivas

á todos es 4, por lo cual se desprende que — 4 es el límite inferior de las raíces negativas de la ecuación dada.

Observación.—Los teoremas II y IV sólo se aplican en casos especiales, cuando las ecuaciones que se estudian permiten satisfacer las condiciones inherentes á los mismos. Pero en cambio, con los teoremas I y III podremos siempre encontrar los límites que se desean ordinariamente; superior de las raíces positivas é inferior de las negativas. Pues basta para ello calcular la transformada en $\frac{1}{x}$ de la ecuación dada y aplicar á la misma dichos dos principios; si los límites así deducidos son $+\alpha$ y $-\beta$, los límites buscados valdrán evidentemente $+\frac{1}{\alpha}$ y $-\frac{1}{\beta}$. — Más adelante tendremos ocasión de aplicar lo que aquí se dice.

Teorema V.—*Todo número que haga positivas á las funciones*

$$
\text{(I)}\quad
\left\{
\begin{array}{l}
f(x) = a_0 . x^m + a_1 . x^{m-1} + a_2 . x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-2} . x^2 + a_{m-1} . x + a_m \\
\varphi_{m-1}(x) = a_1 . x^{m-1} + a_2 . x^{m-2} + \ldots\ldots + a_{m-2} . x^2 + a_{m-1} . x + a_m \\
\varphi_{m-2}(x) = a_2 . x^{m-2} + a_3 . x^{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-2} . x^2 + a_{m-1} . x + a_m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_3(x) = a_{m-3} . x^3 + a_{m-2} . x^2 + a_{m-1}\ x + a_m \\
\varphi_2(x) = a_{m-2} . x^2 + a_{m-1}\ x + a_m \\
\varphi_1(x) = a_{m-1} . x + a_m \\
\varphi_0(x) = a_m
\end{array}
\right.
$$

es un límite inferior de las raíces positivas de $f(x) = 0$. (Corral.)

Esta proposición es correlativa á la regla de Laguerre para encontrar un límite superior de las raíces positivas de la ecuación $f(x) = 0$ utilizando las funciones $f_0, f_1, f_2 \ldots\ldots f_{m-1}$ definidas en el § 11.

Tratemos de expresar la euleriana $E_p f(x)$ en función de las $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{m-p}$ Decimos que dicha relación es la siguiente

$$
E_p f(x) = 1 . 2 . 3 \ldots\ldots p . \Big[\varphi_{m-p} + \frac{p}{1} . \varphi_{m-p-1} + \frac{p.(p+1)}{1.2} . \varphi_{m-p-2} +
$$

$$
+ \ldots\ldots + \frac{p.(p+1).(p+2)\ldots\ldots(p+\alpha-1)}{1.2.3\ldots\ldots\alpha} \varphi_{m-p-\alpha} + \ldots\ldots +
$$

$$+ \frac{p\,.\,(p+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,(m-p)}\,.\,\varphi_0 \Big] \qquad \textbf{(2)}$$

Esta igualdad es cierta para $p = 1$, pues entonces

$$E_1 f(x) = \varphi_{m-1} + \varphi_{m-2} + \varphi_{m-3} + \ldots\ldots + \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_0 \qquad \textbf{(3)}$$

como puede comprobarse con facilidad suma.

Para demostrar la exactitud de la fórmula (2) bastará suponerla cierta para el número p y hacer ver después que también se verifica para el exponente $(p+1)$. Pero antes nos conviene comprobar la identidad

$$S = 1 + \frac{p}{1} + \frac{p\,(p+1)}{1\,.\,2} + \frac{p\,(p+1)\,.\,(p+2)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{p\,(p+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha-1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha} + (\alpha+1)\,.\,\frac{p\,(p+1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,(\alpha+1)} =$$
$$= (p+1)\,.\,\frac{(p+1)\,.\,(p+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha} \qquad \textbf{(4)}$$

lo que se hace por medio de las operaciones siguientes

$$S = (p+1)\,.\,\Big[\frac{p+2}{2} + \frac{p\,(p+2)}{2\,.\,3} + \frac{p\,(p+2)\,.\,(p+3)}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{p\,(p+2)\,.\,.\,.\,(p+\alpha-1)}{2\,.\,3\,.\,.\,.\,\alpha} + \frac{p\,(p+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(\alpha+1)}\,.\,(\alpha+1)\Big] =$$
$$= (p+1)\,.\,\frac{p+2}{2}\,.\,\Big[\frac{p+3}{3} + \frac{p\,(p+3)}{3\,.\,4} + \frac{p\,(p+3)\,.\,(p+4)}{3\,.\,4\,.\,5} + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{p\,(p+3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha-1)}{3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha} + (\alpha+1)\,.\,\frac{p\,(p+3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{3\,.\,4\,.\,.\,.\,.\,.\,(\alpha+1)}\Big] =$$
$$= (p+1)\,.\,\frac{p+2}{2}\,.\,\frac{p+3}{3}\,.\,\Big[\frac{p+4}{4} + \frac{p\,(p+4)}{4\,.\,5} + \frac{p\,(p+4)\,.\,(p+5)}{4\,.\,5\,.\,6} +$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{p\,(p+4)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha-1)}{4\,.\,5\,.\,.\,.\,\alpha} + (\alpha+1)\,.\,\frac{p\,(p+4)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{4\,.\,5\,.\,.\,.\,.\,.\,(\alpha+1)}\Big] =$$

. . . .

$$= (p+1)\,.\,\frac{(p+2)\,.\,(p+3)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha-1)}{2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(\alpha-1)}\,.\,\Big[1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{p\,(p+\alpha)}{\alpha}\Big] =$$
$$= (p+1)\,.\,\frac{(p+1)\,.\,(p+2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(p+\alpha)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,\alpha}$$

Suponiendo cierta la igualdad (2) podemos tomar las eulerianas de ambos miembros, obteniéndose así

$$E_{p+1} f(x) = 1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,p\,.\,\Big[E_1\,\varphi_{m-p} + \frac{p}{1}\,.\,E_1\,\varphi_{m-p-1} +$$

$$+\frac{p.(p+1)}{1.2}.E_1\varphi_{m-p-2}+\ldots\ldots+\frac{p(p+1)\ldots\ldots(p+\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}E_1\varphi_{m-p-\alpha}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{p}{1}.\varphi_{m-p-1}+\frac{p(p+1)}{1.2}.2.\varphi_{m-p-2}+\ldots\ldots+$$

$$+\alpha.\frac{p(p+1)\ldots(p+\alpha-1)}{1.2\ldots\ldots\alpha}.\varphi_{m-p-\alpha}+\ldots\ldots(m-p).\frac{p(p+1)\ldots\ldots(m-1)}{1.2\ldots(m-p)}.\varphi_0\Big] \quad (5)$$

Teniendo en cuenta el significado de la relación (3) se podrá establecer

$$E_1\varphi_{m-p}=\varphi_{m-p-1}+\varphi_{m-p-2}+\ldots\ldots+\varphi_{m-p-\alpha-1}+\ldots\ldots+\varphi_0$$

$$\frac{p}{1}.E_1\varphi_{m-p-1}=\frac{p}{1}.\left[\varphi_{m-p-2}+\varphi_{m-p-3}+\ldots\ldots+\varphi_{m-p-\alpha-1}+\ldots\ldots+\varphi_0\right]$$

$$\frac{p.(p+1)}{1.2}.E_1\varphi_{m-p-2}=\frac{p.(p+1)}{1.2}.\Big[\varphi_{m-p-3}+\varphi_{m-p-4}+$$

$$+\ldots\ldots+\varphi_{m-p-\alpha-1}+\ldots\ldots+\varphi_0\Big]$$

. . . .

$$\frac{p(p+1)\ldots(p+\alpha-1)}{1.2\ldots\alpha}.E_1\varphi_{m-p-\alpha}=\frac{p(p+1)\ldots(p+\alpha-1)}{1.2\ldots\ldots\alpha}.\Big[\varphi_{m-p-\alpha-1}+$$

$$+\varphi_{m-p-\alpha-2}+\ldots\ldots+\varphi_0\Big]$$

. . . .

Si sustituímos estos valores en (5) y tenemos en cuenta la igualdad (4) encontraremos como deseamos probar

$$E_{p+1}f(x)=1.2.3\ldots(p+1).\Big[\varphi_{m-p-1}+\frac{(p+1)}{1}.\varphi_{m-p-2}+$$

$$+\frac{(p+1).(p+2)}{1.2}.\varphi_{m-p-3}+\ldots\ldots+\frac{(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+\alpha)}{1.2\ldots\ldots\alpha}.\varphi_{m-p-\alpha-1}+$$

$$+\ldots\ldots+\frac{(p+1).(p+2)\ldots\ldots(m-1)}{1.2\ldots\ldots(m-p-1)}.\varphi_0\Big]$$

La igualdad (2) demuestra el presente teorema, pues si α es un número que hace positivas á todas las funciones de la serie (1) también hará positivas á

$$f(x),\ E_1f(x),\ E_2f(x),\ E_3f(x)\ldots\ldots E_mf(x)$$

en cuyo caso [teorema I] es efectivamente un límite inferior de las raíces positivas de $f(x)=0$.

Otra aplicación de la igualdad (2) es poder expresar el desarrollo

de $f(x+h)$ por medio de las funciones $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_{m-1}$. Para ello, en la fórmula ya establecida

$$f(x+h) = f(x).\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - E_1 f(x).\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\frac{h}{x} +$$
$$+\frac{1}{1.2}.\frac{h^2}{x^2}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2}.E_2 f(x) - \frac{1}{1.2.3}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\frac{h^3}{x^3}.E_3 f(x) +$$
$$+\ldots\ldots+\left(-1\right)^m.\frac{1}{1.2.3\ldots m}.\frac{h^m}{x^m}.E_m f(x)$$

sustituiremos en vez de $E_1 f(x)$, $E_2 f(x)$, $E_3 f(x) \ldots\ldots E_p f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$ sus valores deducidos de (2) haciendo sucesivamente $p = 1, 2, 3 \ldots\ldots m$; así procediendo, se encontrará después de realizar operaciones

$$f(x+h) = f(x).\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - \frac{h}{x}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\varphi_{m-1} -$$
$$-\frac{h}{x}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2}.\varphi_{m-2} - \frac{h}{x}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\varphi_{m-3} -$$
$$-\ldots\ldots-\frac{h}{x}.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-p}.\varphi_{m-p} - \ldots\ldots - \frac{h}{x}.\varphi_0. \qquad \textbf{(6)}$$

Cambiando h en $-h$ tendremos

$$f(x-h) = f(x).\left(1-\frac{h}{x}\right)^m + \frac{h}{x}.\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\varphi_{m-1} +$$
$$+\frac{h}{x}.\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-2}.\varphi_{m-2} + \frac{h}{x}\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-3}.\varphi_{m-3} +$$
$$+\ldots\ldots+\frac{h}{x}.\left(1-\frac{h}{x}\right)^{m-p}.\varphi_{m-p} + \ldots\ldots + \frac{h}{x}.\varphi_0 \qquad \textbf{(7)}$$

El aspecto de esta fórmula (7) demuestra que si el número $x = \alpha > 0$ es tal que todas las funciones

$$f(\alpha),\ \varphi_{m-1}(\alpha),\ \varphi_{m-2}(\alpha) \ldots\ldots \varphi_0(\alpha)$$

son positivas, la ecuación $f(x) = 0$ no admite ninguna raíz positiva $\alpha - h > 0$ inferior á α, puesto que para $\alpha - h < \alpha$ resulta siempre $f(\alpha - h) > 0$. El número α es, pues, un límite inferior de las raíces positivas de la ecuación.

Para aplicar este teorema, es necesario preparar antes la ecua-

ción haciendo que su término independiente sea positivo: siendo algunas veces preciso cambiar todos los signos de sus términos, con lo cual no se altera la función dada.

Ejemplo I.—Sea la ecuación

$$x^6 + 3 . x^5 - 36 . x^4 - 45 . x^3 + 93 . x^2 + 132 . x + 140 = 0$$

disponiéndose los cálculos del siguiente modo:

$f(x) = x^6 + 3 x^5 - 36 . x^4 - 45 . x^3 + 93 . x^2 + 132 . x + 140.$			+
$\varphi_5(x) = 3 x^5 - 36 . x^4 - 45 . x^3 + 93 . x^2 + 132 . x + 140$			+
$\varphi_4(x) = -36 . x^4 - 45 . x^3 + 93 . x^2 + 132 . x + 140$	—	—	+
$\varphi_3(x) = -45 x^3 + 93 x^2 + 132 x + 140$.	+	+	+
$\varphi_2(x) = 93 x^2 + 132 x + 140$.	+	+	+
$\varphi_1(x) = 132 . x + 140$.	+	+	+
$\varphi_0(x) = 140$	+	+	+
$x =$	3	2	1

de donde se deduce que 1 es límite inferior de las raíces positivas de esta ecuación.

Ejemplo II.—Consideremos la ecuación

$$x^5 - 3 x^3 + x^2 - 8 x - 10 = 0$$

estudiada por Briot y por Laguerre. Como el último término es negativo, cambiaremos de signo á todo el primer miembro. Así tendremos

$f(x) = -x^5 + 3 x^3 - x^2 + 8 x + 10.$	—	+
$\varphi_4(x) = \varphi_3(x) = 3 x^3 - x^2 + 8 x + 10$	+	+
$\varphi_2(x) = -x^2 + 8 x + 10$	+	+
$\varphi_1(x) = 8 x + 10$.	+	+
$\varphi_0(x) = 10$	+	+
$x =$	3	2

resultando ser 2 el límite buscado.

Ejemplo III.—Tratemos la ecuación

$$x^4 - 63 . x^2 + 22 . x + 840 = 0$$

á la cual no es necesario cambiar de signo. Se tendrá

$f(x) = x^4 - 63 \cdot x^2 + 22 \cdot x + 840$.			+
$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) = -63 \cdot x^2 + 22 \; x + 840$ . . .	-	—	+
$\varphi_1(x) = 22 \cdot x + 840$	+	+	+
$\varphi_0(x) = 840$.	+	+	+
$x =$	5	4	3

lo que prueba es 3 el límite inferior de las raíces positivas.

Ejemplo IV.—Estudiemos la ecuación

$$x^4 - 2\,x^3 + 5 \cdot x^2 + 14 \cdot x - 3 = 0$$

considerada por Rubini (*Tratado de Álgebra*, pág. 353). Cambiando de signo al primer miembro se obtendrá

$f(x) = -x^4 + 2\,x^3 - 5 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 3$ . .		+
$\varphi_3(x) = 2\,x^3 - 5 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 3$.		+
$\varphi_2(x) = -5 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 3$		0
$\varphi_1(x) = -14 \cdot x + 3$.	—	+
$\varphi_0(x) = 3$.	+	+
$x =$	1	0.2

cuyo resultado nos demuestra que 0 . 2 es el límite inferior buscado.

§ 17.—Determinación del número máximo de raíces reales de una ecuación comprendidas entre dos números, usando la serie de funciones eulerianas.

Teorema I.—*Siendo dada una ecuación cualquiera $f(x) = 0$ de grado m, si en la serie formada por las $(m+1)$ funciones*

(I) $E_m f(x),\ E_{m-1} f(x),\ E_{m-2} f(x) \ldots\ldots E_2 f(x),\ E_1 f(x),\ f(x)$

sustituímos en lugar de x un cierto número p y anotamos solamente los signos de los resultados, obtendremos una cierta serie (p) de signos; sustituyendo después en (I) otro número $q > p$ por x, nos resultará otra serie de signos (q). Si p y q son positivos, el número de raíces reales de $f(x) = 0$ comprendidas entre ellos es igual ó menor que la diferencia entre las variaciones de la serie (q) sobre las de (p): si ambos (p y q) son negativos el número de raíces negativas comprendidas entre ellos es tam-

bién igual ó menor que la diferencia entre los números de variaciones que respectivamente presentan las series (p) *y* (q). *En ambos casos el exceso* K *entre la diferencia de variaciones, de la serie* (q) *sobre la* (p) *ya de la* (p) *sobre la* (q), *y el número de raíces comprendidas entre* p *y* q, *es siempre un número par.* (Corral.)

Cuando los dos números dados p y q sean de signos contrarios, por ejemplo $p > 0$, $q < 0$, entonces habrá que aplicar el presente teorema, primero al conjunto p y 0, después al formado por los números 0 y q. De este modo se conseguirá obtener el número máximo de raíces de la ecuación dada que se encuentran comprendidas entre p y q.

La proposición que nos ocupa, es análoga al famoso teorema de Budan y Fourier que utiliza la serie formada por las funciones derivadas, mientras que nosotros empleamos las eulerianas de la ecuación dada.

Antepongamos la demostración de los dos siguientes lemas:

Lema 1.º—*Si una euleriana cualquiera* $E_i\, f(x)$ *de* $f(x)$ *se anula para un cierto valor* $x = a$ *de la variable sin que sea cero la euleriana siguiente* $E_{i+1} f(x)$, *resultará: 1.º Que si* a *es un número positivo,* $E_i\, f(a - h)$ *y* $E_{i+1} f(a - h)$ *tendrán un mismo signo cuando* h *tenga un valor suficientemente pequeño, mientras que* $E_i\, f(a + h)$ *y* $E_{i+1} f(a + h)$ *serán de signos contrarios: 2.º Que cuando* a *es negativo,* $E_i f(a - h)$ *y* $E_{i+1} f(a - h)$ *tendrán signos contrarios, así como* $E_i f(a + h)$ *y* $E_{i+1} f(a + h)$ *serán del mismo signo.* (Corral.)

Considerando á $E_i\, f(a - h)$ y $E_i\, f(a + h)$ como funciones independientes, podemos desarrollar á cada una de ellas por medio de la fórmula de Taylor; así tendremos

$$E_i f(a-h) = E_i f(a) - \frac{h}{1} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)' + \frac{h^2}{1.2} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)'' - \\ - \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)''' + \cdots\cdots$$

$$E_i f(a+h) = E_i f(a) + \frac{h}{1} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)' + \frac{h^2}{1.2} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)'' + \\ + \frac{h^3}{1.2.3} \cdot \Big(E_i f(a)\Big)''' + \cdots\cdots$$

Mas como por hipótesis $E_i\, f(a) = 0$, deduciremos

$$\left(E_i f(a)\right)' = - \frac{E_{i+1} f(a)}{a}$$

por lo cual

$$E_i f(a-h) = h \cdot \frac{E_{i+1} f(a)}{a} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \cdot \left(E_i f(a)\right)'' - \ldots\ldots$$

$$E_i f(a+h) = -h \frac{E_{i+1} f(a)}{a} + \frac{h^2}{1 \cdot 2} \left(E_i f(a)\right)'' + \ldots\ldots$$

Dando á h valores suficientemente pequeños y de tal magnitud que los números $(a - h)$ y $(a + h)$ no comprendan raíz alguna de $E_{i+1} f(x)$, tendremos que $E_{i+1} f(a-h)$, $E_{i+1} f(a)$, $E_{i+1} f(a+h)$ serán del mismo signo; al propio tiempo se puede conseguir que el valor numérico de $h \cdot \frac{E_{i+1} f(a)}{a}$ sea mayor que el de los términos restantes de los segundos miembros de estas dos últimas igualdades. Por consecuencia siendo a positivo, entonces $E_i f(a-h)$ y $E_{i+1} f(a)$ ó $E_{i+1} f(a-h)$ son de un mismo signo; así como también $E_i f(a+h)$ y $E_{i+1} f(a)$ ó $E_{i+1} f(a+h)$ tendrán signos contrarios. Cuando por el contrario el número a es negativo, las funciones $E_i f(a+h)$ y $E_{i+1} f(a+h)$ tendrán idéntico signo, mientras que $E_i f(a-h)$ y $E_{i+1} f(a-h)$ tendrán signos contrarios. Todo conforme al enunciado.

Lema 2.º—*Si para un mismo valor $x = a$ de la variable se anulan las eulerianas sucesivas*

$$E_i f(x), \quad E_{i-1} f(x), \quad E_{i-2} f(x), \quad E_{i-3} f(x) \ldots\ldots$$

decimos que á un valor de h suficientemente pequeño

$$E_i f(a-h), \quad E_{i-2} f(a-h), \quad E_{i-4} f(a-h) \ldots\ldots$$

llevan el mismo signo que $E_{i+1} f(a-h)$ si a es positivo, y signo contrario que la misma cantidad si a es negativo; pero

$$E_i f(a+h), \quad E_{i-2} f(a+h), \quad E_{i-4} f(a+h) \ldots\ldots$$

serán del mismo signo que $E_{i+1} f(a+h)$ si a es negativo, y de signo contrario si a es positivo. Además, ya sea a positivo ó negativo

$$E_{i-1}\,f(a-h)\,,\qquad E_{i-3}\,f(a-h)\,,\qquad E_{i-5}\,f(a-h)\,\ldots\ldots$$

tienen el mismo signo que $E_{i+1}\,f\,(a-h)$; *mientras que*

$$E_{i-1}\,f(a+h)\,,\qquad E_{i-3}\,f(a+h)\,,\qquad E_{i-5}\,f(a+h)\,\ldots\ldots$$

serán del mismo signo que $E_{i+1}\,f\,(a+h)$. (Corral.)

Por hipótesis, tenemos que

$$E_i f(a)=0\,,\quad E_{i-1}\,f(a)=0\,,\quad E_{i-2}\,f(a)=0\,,\quad E_{i-3}\,f(a)=0\ldots$$

luego según la fórmula de Taylor

$$E_i\,f(a-h)=E_i f(a)-\frac{h}{1}\Big(E_i f(a)\Big)'+\frac{h^2}{1\,.\,2}\,.\Big(E_i f(a)\Big)''-\ldots\ldots$$

$$E_{i-1}\,f(a-h)=E_{i-1}\,f(a)-\frac{h}{1}\Big(E_{i-1} f(a)\Big)'+\frac{h^2}{1\,.\,2}\,.\Big(E_{i-1} f(a)\Big)''-\ldots$$

$$E_{i-2}\,f(a-h)=E_{i-2}\,f(a)-\frac{h}{1}\,.\Big(E_{i-2} f(a)\Big)'+\frac{h^2}{1.2}\,.\Big(E_{i-2} f(a)\Big)''-\ldots$$

$$E_{i-3}\,f(a-h)=E_{i-3}\,f(a)-\frac{h}{1}\,.\Big(E_{i-3} f(a)\Big)'+\frac{h^2}{1.2}\,.\Big(E_{i-3} f(a)\Big)''-\ldots$$

Cuando las $(n-1)$ primeras eulerianas de una función se anulan para un cierto valor de la variable, también son cero las $(n-1)$ primeras derivadas, al hacer igual sustitución. En virtud de la fórmula que expresa la derivada de una función conocidas sus eulerianas, tendremos en tal caso

$$f^{(n)}\,(x)=(-1)^n\,.\,\frac{E_n\,f\,(x)}{x^n}\,.$$

por lo que

$$\Big(E_i\,f(a)\Big)'=-\,\frac{E_{i+1}\,f\,(a)}{a}\qquad\Big(E_{i-1}\,f(a)\Big)''=\frac{E_{i+1}\,f\,(a)}{a^2}$$

$$\Big(E_{i-2}\,f(a)\Big)'''=-\,\frac{E_{i+1}\,f\,(a)}{a^3}\qquad\Big(E_{i-3}\,f(a)\Big)''''=\frac{E_{i+1}\,f\,(a)}{a^4}$$

Los desarrollos anteriores, á causa de la hipótesis hecha, se convertirán en

$$\left.\begin{array}{l}
E_i f(a-h) = h \, . \, \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a} + \dfrac{h^2}{1.2} \left(E_i f(a)\right)'' - \dots\dots \\
E_{i-1} f(a-h) = \dfrac{h^2}{1.2} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^2} - \dfrac{h^3}{1.2.3} . \left(E_{i-1} f(a)\right)''' + \dots\dots \\
E_{i-2} f(a-h) = \dfrac{h^3}{1.2.3} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^3} + \dfrac{h^4}{1.2.3.4} . \left(E_{i-2} f(a)\right)'''' - \dots\dots \\
E_{i-3} f(a-h) = \dfrac{h^4}{1.2.3.4} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^4} - \dfrac{h^5}{1.2.3.4.5} . \left(E_{i-3} f(a)\right)''''' + \dots
\end{array}\right\} \text{(a)}$$

. . . .

El incremento h se elegirá lo suficientemente pequeño para que entre $(a - h)$ y $(a + h)$ no exista raíz alguna de la ecuación

$$E_{i+1} f(x) = 0$$

y entonces $E_{i+1} f(a - h)$, $E_{i+1} f(a)$, $E_{i+1} f(a + h)$ serán las tres del mismo signo; además puede hacerse que el signo de los segundos miembros de las cuatro fórmulas (a) sea el mismo que el de su primer término. Así tendremos los dos casos.

$$a > 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$E_{i+1} f(a-h) \gtrless 0 , \; E_i f(a-h) \gtrless 0 , \; E_{i-2} f(a-h) \gtrless 0 \dots\dots$$

$$a < 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$E_{i+1} f(a-h) \gtrless 0 , \; E_i f(a-h) \lessgtr 0 , \; E_{i-2} f(a-h) \lessgtr 0 \dots\dots$$

Cambiando en las fórmulas (a) el h en $-h$, obtendremos

$$\left.\begin{array}{l}
E_i f(a+h) = - h \, . \, \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a} + \dfrac{h^2}{1.2} . \left(E_i f(a)\right)'' + \dots\dots \\
E_{i-1} f(a+h) = \dfrac{h^2}{1.2} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^2} + \dfrac{h^3}{1.2.3} . \left(E_{i-1} f(a)\right)''' + \dots\dots \\
E_{i-2} f(a+h) = - \dfrac{h^3}{1.2.3} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^3} + \dfrac{h^4}{1.2.3.4} . \left(E_{i-2} f(a)\right)'''' + \dots \\
E_{i-3} f(a+h) = \dfrac{h^4}{1.2.3.4} . \dfrac{E_{i+1} f(a)}{a^4} + \dfrac{h^5}{1.2.3.4.5} . \left(E_{i-3} f(a)\right)''''' + \dots
\end{array}\right\} \text{(b)}$$

y por consiguiente

$$a > 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$E_{i+1} f(a+h) \gtrless 0\ ,\ E_i f(a+h) \lessgtr 0\ ,\ E_{i-2} f(a+h) \lessgtr 0 \ldots\ldots$$

$$a < 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$F_{i+1} f(a+h) \gtrless 0\ ,\ E_i f(a+h) \gtrless 0\ ,\ E_{i-2} f(a+h) \gtrless 0 \ldots\ldots$$

Por otra parte, tanto las fórmulas (a) como las (b) nos dicen que

$$a \gtrless 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$E_{i+1} f(a-h) \gtrless 0\ ,\ E_{i-1} f(a-h) \gtrless 0\ ,\ E_{i-3} f(a-h) \gtrless 0 \ldots\ldots$$

$$a \gtrless 0 \text{ y } E_{i+1} f(a) \gtrless 0$$

entonces

$$E_{i+1} f(a+h) \gtrless 0\ ,\ E_{i-1} f(a+h) \gtrless 0\ ,\ E_{i-3} f(a+h) \gtrless 0 \ldots\ldots$$

cuyas desigualdades comprueban íntegramente el lema segundo.

Pasemos ahora á la demostración del teorema que nos ocupa.

Si en la serie de funciones

$$E_m f(x)\ ,\ E_{m-1} f(x)\ ,\ E_{m-2} f(x) \ldots\ldots E_2 f(x)\ ,\ E_1 f(x) \quad f(x)$$

sustituímos por la variable x un valor numérico cualquiera, cada uno de sus términos presentará un cierto signo; de modo que si existe variación en los signos de dicha serie en un intervalo dado será preciso que la función correspondiente pase por cero. Estudiemos, pues, los diferentes casos que pueden ocurrir.

Primer caso.—Que se anule solamente $f(x)$.

Sea el valor de x que anule á $f(x)$ igual á a: entonces $f(a) = 0$. Podrá suceder:

1.° *Que a sea positivo:* llamando en tal caso por h una cantidad suficientemente pequeña para que $(a - h)$ y $(a + h)$ no comprendan raíz alguna de $E_1 f(x)$, se tendrá, según el lema primero, que *creciendo x entre estos valores el número de variaciones aumenta en una unidad*, pues

	$f(x)$	$E_1 f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$
$x = a$	0	$\pm$
$x = a + h$	$\mp$	$\pm$

2.° *Si a fuese negativo el número de variaciones disminuye en una unidad*, pues entonces según el mismo lema

	$f(x)$	$E_1 f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\mp$
$x = a$	0	$\mp$
$x = a + h$	$\mp$	$\mp$

Luego haciendo crecer á x desde 0 *á* $+\infty$ *ó desde* 0 *hasta* $-\infty$, *cada vez que reciba un valor que anule únicamente á* $f(x)$ *el número de variaciones aumenta ó disminuye en una unidad.*

Segundo caso.—Que se anulen las k funciones.

$$E_i f(x),\quad E_{i-1} f(x),\quad E_{i-2} f(x) \ldots\ldots E_{i-k+1} f(x)$$

sin anularse $f(x)$.

Sea este valor particular de la variable $x = a$, de modo que

$$E_i f(a) = E_{i-1} f(a) = E_{i-2} f(a) = \ldots\ldots = E_{i-k+1} f(a) = 0$$

pudiendo entonces ocurrir:

1.° *Que a sea positivo.* Siendo k un número par, $k = 2p$, tendremos el siguiente cuadro de valores apoyándonos en el lema segundo ya probado

	$E_{i+1} f(x)$	$E_i f(x)$	$E_{i-1} f(x)$	$E_{i-2} f(x)$	.....	$E_{i-k+1} f(x)$	$E_{i-k} f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\pm$
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\pm$	$\pm$

si bien puede también suceder que $E_{i-k} f(x)$ sea de signo contrario á $E_{i+1} f(x)$ y entonces

	$E_{i+1} f(x)$	$E_i f(x)$	$E_{i-1} f(x)$	$E_{i-2} f(x)$	....	$E_{i-k+1} f(x)$	$E_{i-k} f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\mp$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\mp$
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\pm$	$\mp$

En estos dos cuadros de valores $E_{i-k}\,f(x)$ tiene el mismo signo para $x = a - h$, $x = a$, $x = a + h$, pues el número a no es raíz de dicha ecuación $E_{i-k}\,f(x) = 0$, siendo así que h puede ser infinitamente pequeño; lo mismo decimos acerca de $E_{i+1}\,f(x)$.

El número de términos de cada cuadro es $k + 2$; mas ya se considere el primero, ya el segundo, la serie correspondiente á $x = a - h$ presenta k variaciones menos que la relativa á $x = a + h$.

Si k fuese un número impar, $k = 2\,p + 1$, se tendrá

	$E_{i+1}\,f'(x)$	$E_i\,f(x)$	$E_{i-1}\,f(x)$	$E_{i-2}\,f(x)$	.....	$E_{i-k+1}\,f(x)$	$E_{i-k}\,f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\pm$
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\mp$	$\pm$

ó bien

$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\mp$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\mp$
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\mp$	$\mp$

En este primer cuadro el número de variaciones ha aumentado $k + 1$ unidades al pasar de la serie correspondiente á $x = a - h$ á la $x = a + h$; en el segundo cuadro las variaciones aumentadas al pasar de la primera á la segunda serie son en número de $k - 1$. De modo que llamando λ el número de variaciones de la serie completa

$$E_m\,f(x)\,,\ E_{m-1}\,f(x)\,.\,.\,.\,.\,.\ E_2\,f(x)\,,\ E_1\,f(x)\,,\ f(x)$$

cuando $x = a - h$, y designando por μ el número de variaciones que la misma presenta cuando $x = a + h$; se tendrá, si a es positivo, que $\mu > \lambda$ y además $\mu - \lambda$ *es igual siempre á un número par,* pues vimos que cuando k era par $\mu - \lambda = k$ y en el caso de ser k un número impar $\mu - \lambda = k + 1$ ó $k - 1$.

Es decir, que *la serie obtenida para* $x = a - h$ *aumenta un número par de variaciones si* a *es positivo.*

2.º *Que* a *sea negativo.* Siendo $k = 2\,p$, tendremos apoyándonos en el lema segundo

	$E_{i+1} f(x)$	$E_i f(x)$	$E_{i-1} f(x)$	$E_{i-2} f(x)$	.....	$E_{i-k+1} f(x)$	$E_{i-k} f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\pm$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\pm$
$x = a + h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$

ó bien

$x = a - h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\pm$	$\mp$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\mp$
$x = a + h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\mp$

resultando que tanto en el primero como en el segundo cuadro, el número total de variaciones disminuye en k unidades al pasar de la serie relativa á $x = a - h$ á la que corresponde á $x = a + h$.

Si k fuese impar, $k = 2p + 1$, tendríamos.

	$E_{i+1} f(x)$	$E_i f(x)$	$E_{i-1} f(x)$	$E_{i-2} f(x)$	.....	$E_{i-k+1} f(x)$	$E_{i-k} f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\mp$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\pm$
$x = a + h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$

ó también

$x = a - h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\mp$	$\mp$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	$\mp$
$x = a + h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\mp$

en donde vemos que el número de variaciones disminuídas es en el primer caso $k + 1$ y en el segundo $k - 1$. Por tanto, si a es negativo, el número de variaciones que la serie

$$E_m f(x), E_{m-1} f(x) \ldots\ldots E_2 f(x), E_1 f(x), f(x)$$

disminuye al pasar la variable x del valor $(a - h)$ al $(a + h)$, *es siempre un número par.*

Tercer caso.—Que se anulen k funciones consecutivas, estando entre ellas $f(x)$.

Si $k = 2p$ y $a > 0$, tendremos

	$E_k f(x)$	$E_{k-1} f(x)$	$E_{k-2} f(x)$	$E_{k-3} f(x)$	.....	$E_2 f(x)$	$E_1 f(x)$	$f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	0	0
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\pm$	$\mp$	$\pm$

pero si $k = 2p + 1$ y $a > 0$, entonces

	$E_k f(x)$	$E_{k-1} f(x)$	$E_{k-2} f(x)$	$E_{k-3} f(x)$	.....	$E_2 f(x)$	$E_1 f(x)$	$f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	.....	$\pm$	$\pm$	$\pm$
$x = a$	$\pm$	0	0	0	.....	0	0	0
$x = a + h$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	.....	$\mp$	$\pm$	$\mp$

Tanto en el primero como en el segundo cuadro el número de variaciones aumentadas es k; pero según el teorema de las raíces iguales ya demostrado, si para un valor $x = a$ se anulan al mismo tiempo

$$f(a) = E_1 f(a) = E_2 f(a) = \ldots\ldots = E_{k-2} f(a) = E_{k-1} f(a) = 0$$

a es raíz de $f(x) = 0$ con un grado de multiplicidad igual á k

Por consecuencia, *dando valores á x desde cero hasta $+\infty$ cada vez que se pase por un número que sea k veces raíz de $f(x) = 0$, el número de variaciones de la serie de eulerianas aumenta en k unidades.*

De idéntica manera se probaría que *haciendo crecer á x desde $-\infty$ hasta 0, cada vez que se pasa por un valor que sea k veces raíz de $f(x) = 0$, el número de variaciones de la serie considerada de eulerianas disminuye en k unidades.*

Cuarto caso.—Supongamos que un mismo valor de la variable $x = a$ anule á un cierto número de funciones de la serie

$$E_m f(x),\ E_{m-1} f(x) \ldots\ldots E_2 f(x),\ E_1 f(x),\ f(x)$$

pero que no son todas consecutivas; podrá suceder entonces que en un grupo de ellas se encuentra $f(x)$, en cuyo caso si λ es el número de las funciones de este grupo que se reducen á cero para $x = a$, el número de variaciones aumenta ó disminuye en λ unidades según $a > 0$ ó bien $a < 0$. En los grupos restantes se podrá ir haciendo subdivisiones de modo que las funciones anuladas queden consecutivas; entonces, según el caso segundo, *el número de variaciones aumenta ó disminuye en un número par de unidades según que a sea positivo ó negativo.*

Queda así comprobada la exactitud del presente teorema.

Para hallar las raíces de una ecuación comprendidas entre dos números de diferente signo $-\alpha$ y $+\beta$ habrá que subdividir la investigación en dos partes: la primera que será relativa á las raíces del intervalo $-\alpha$ y 0; la segunda para el espacio 0 y $+\beta$. Si lo

que se desea encontrar es el número total de raíces positivas y negativas de la ecuación, entonces se sustituirá $-\alpha$ por el límite inferior de las raíces negativas, y $+\beta$ por el límite superior de las raíces positivas.

Sea, por ejemplo, la ecuación

$$f(x) = x^4 - 2\,x^3 + 5\,x^2 - 3\,x - 8 = 0$$

así que

$$E_1 f(x) = -2 \,.\, x^3 + 10 \,.\, x^2 - 9 \,.\, x - 32$$
$$E_2 f(x) = 10 \,.\, x^2 - 18 \,.\, x - 96$$
$$E_3 f(x) = -18 \,.\, x - 192$$
$$E_4 f(x) = -192$$

Para saber el número de raíces reales comprendidas entre -1 y $+4$, haremos las siguientes sustituciones en la serie de eulerianas de la ecuación dada:

	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$	$E_4 f(x)$
$x = -1$	+	—	—	—	—
$x = 0$	—	—	—	—	—
$x = 4$	+	—	—	—	—

Comparando la primera serie de signos ($x = -1$) con la segunda ($x = 0$), se observa que el número de variaciones disminuye en 1; así, pues, el total de raíces reales comprendidas entre -1 y 0 es también 1, porque de esta cifra no se puede restar más número par que 0. Del mismo modo se deduce que las raíces reales positivas entre 0 y 4 es una, porque al pasar de la segunda serie ($x = 0$) á la tercera ($x = 4$) no se aumenta más que una sola variación. Resulta por tanto que la totalidad de raíces reales de $f(x) = 0$ incluídas entre -1 y $+4$ es exactamente igual á dos.

Consideremos la ecuación

$$x^5 - 5 \,.\, x^4 - 16 \,.\, x^3 + 12 \,.\, x^2 - 9 \,.\, x - 5 = 0$$

estudiada por Petersen en su *Théorie des équations algébraiques*, página 191. Tomaremos la serie de funciones

$$f(x) = x^5 - 5 \,.\, x^4 - 16 \,.\, x^3 + 12 \,.\, x^2 - 9 \,.\, x - 5$$
$$E_1 f(x) = -5 \,.\, x^4 - 32 \,.\, x^3 + 36\,x^2 - 36 \,.\, x - 25$$
$$E_2 f(x) = -32 \,.\, x^3 + 72 \,.\, x^2 - 108 \,.\, x - 100$$
$$E_3 f(x) = 72 \,.\, x^2 - 216 \,.\, x - 300$$
$$E_4 f(x) = -216 \,.\, x - 600$$
$$E_5 f(x) = -600$$

en la cual sustituiremos los valores

$$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 7,\ 8$$

formándose así el cuadro siguiente:

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$	$E_4 f(x)$	$E_5 f(x)$
— 3	—	+	+	+	+	—
— 2	+	+	+	+	—	—
— 1	+	+	+	+	—	—
0	—	—	—	—	—	—
1	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	+	—	—
8	+	—	—	+	—	—

Entre — 3 y — 2 se pierde una variación, lo que indica la existencia de una raíz real en dicho intervalo. Cosa igual ocurre entre — 1 y 0, demostrándose así que la ecuación tiene una raíz real negativa comprendida entre tales números. La serie de funciones eulerianas gana una variación entre 7 y 8, luego también en este intervalo hay comprendida una raíz real de la ecuación dada.

Al pasar de 1 á 7 se ganan dos variaciones; de modo que pueden existir dos raíces reales entre tales límites, ó bien la ecuación propuesta tiene dos raíces imaginarias. Más adelante indicaremos un procedimiento que permite investigar la verdad desapareciendo toda duda ó incertidumbre de este caso ú otros análogos.

Corolario I.— *Si la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene* N *raíces comprendidas entre los dos números* $-p$ *y* q *de signos contrarios* $(q > p)$, *y la serie de eulerianas de la función dada gana y pierde* $N + 2K$ *variaciones en el paso de* $x = -p$ *á* $x = q$, *la ecuación tendrá por lo menos* $2K$ *raíces imaginarias.* (Corral.)

Supongamos que la serie de eulerianas

$$E_m f(x), \quad E_{m-1} f(x) \ldots\ldots E_2 f(x), \quad E_1 f(x), \quad f(x)$$

al sustituir los valores numéricos

$$-\infty \quad -p \quad 0 \quad +q \quad +\infty$$

presente las siguientes variaciones

$$v_{-\infty} \quad v_{-p} \quad v_0 \quad v_q \quad v_{+\infty}$$

Designemos por

$$N_0 \qquad N_1 \qquad N_2 \qquad N_3$$

los números de raíces reales de $f(x) = 0$ comprendidas respectivamente en los anteriores intervalos.

Según el teorema precedente, podremos establecer las igualdades que siguen

variaciones perdidas $= v_{-\infty} - v_{-p} = N_0 + 2\,K_0$

» » $= v_{-p} - v_0 = N_1 + 2\,K_1$

variaciones ganadas $= v_q - v_0 = N_2 + 2 . K_2$

» » $= v_{+\infty} - v_q = N_3 + 2 . K_3$

Sumando la primera con la segunda, la tercera con la cuarta y luego estos dos resultados, obtendremos

$$(m) \quad v_{+\infty} + v_{-\infty} - 2 . v_0 = N_0 + N_1 + N_2 + N_3 + \\ + 2 . (K_0 + K_1 + K_2 + K_3)$$

Según la hipótesis hecha

$$N = N_1 + N_2$$
$$K = K_1 + K_2$$

Designando por R el número total de raíces reales de la ecuación

$$R = N_0 + N_1 + N_2 + N_3$$

la igualdad última se convierte en

$$v_{+\infty} + v_{-\infty} - 2\,v_0 = R + 2\,(K_0 + K + K_3)$$

Llamando V el número de variaciones de la ecuación propuesta $f(x) = 0$ y por V' el número de variaciones de su transformada en $-x$, es fácil deducir que

$$v_{+\infty} = V \qquad v_{-\infty} = V' \qquad v_0 = 0$$

La igualdad (m) será entonces

$$(n) \quad V + V' = R + 2\,(K_0 + K + K_3)$$

Si en la ecuación dada faltase algún término entre otros dos de signos contrarios ó del mismo signo, se podrá establecer

$$m = V + V' + 2\,S$$

(véase *Cours d' Algèbre Supérieure* de Serret, 5.ª edición, tomo I, página 262) luego en virtud de (n)

$$m = R + 2\,(K_0 + K + K_3 + S)$$

y como evidentemente

$$m = R + 2\,I$$

si $2\,I$ representa el número de raíces imaginarias de $f(x) = 0$, será en definitiva

$$2\,I = 2\,(K_0 + K + K_3 + S)$$

de dorde conforme al enunciado

$$2\,I \geqq 2\,K = 2\,(K_1 + K_2)\,.$$

Corolario II.—*Sea $f(x) = 0$ una ecuación de grado m cuyas raíces son todas reales y $E_1 f(x)$, $E_2 f(x)$, $E_3 f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$ las m eulerianas sucesivas del polinomio $f(x)$. Si en la serie de las $(m + 1)$ funciones*

$$f(x)\,.\,E_1 f(x)\,,\,E_2 f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$$

se sustituye sucesivamente dos cantidades reales cualesquiera $-\,p$ y $+\,q > -\,p$, y si después de cada sustitución se encuentran las variaciones de signos que presenta la serie de los resultados, la diferencia entre el número de variaciones existentes para $x = q$ y el relativo á $x = -\,p$, es precisamente igual al exceso del número de raíces positivas sobre el número de raíces negativas que en la ecuación propuesta se encuentran comprendidas entre $-\,p$ y $+\,q$. (Corral.)

En el supuesto de que todas las raíces de la ecuación dada son reales, el valor de I será nulo y también necesariamente

$$K_0 = 0 \qquad K_1 = 0 \qquad K_2 = 0 \qquad K_3 = 0 \qquad S = 0 \qquad K = 0$$

por lo que tendremos

$$v_{-p} - v_0 = N_1$$
$$v_q - v_0 = N_2$$

de donde deducimos

$$v_q - v_{-p} = N_2 - N_1$$

de conformidad al enunciado.

Corolario III. — *El número de raíces reales positivas de una ecuación cualquiera es igual ó menor que el número de variaciones de su primer miembro; cuando es menor, la diferencia es siempre un número par.* (Descartes.)

Las igualdades establecidas en el corolario I nos dan

$$v_{+\infty} - v_0 = N_2 + N_3 + 2(K_2 + K_3)$$

y como según vimos

$$v_{+\infty} = V \qquad v_0 = 0$$

resultará

$$V = N_2 + N_3 + 2(K_2 + K_3)$$

lo que prueba la presente regla, ya que $N_2 + N_3$ representa la totalidad de las raíces positivas de $f(x) = 0$, así como V es el número de variaciones de su primer miembro.

Corolario IV.— *Cuando una ecuación tiene todas sus raíces reales, el número de raíces positivas es igual al número de sus variaciones, mientras que el número de raíces negativas es igual al número de variaciones de su transformada en* $-x$. (Descartes.)

Tenemos efectivamente

$$v_{+\infty} - v_0 = N_2 + N_3 + 2(K_2 + K_3)$$
$$v_{-\infty} - v_0 = N_0 + N_1 + 2(K_0 + K_1)$$

pero como la ecuación tiene todas sus raíces reales

$$K_0 = K_1 = K_2 = K_3 = 0$$

y entonces

$$v_{+\infty} - v_0 = N_2 + N_3$$
$$v_{-\infty} - v_0 = N_0 + N_1$$

Según ya se demostró

$$v_{+\infty} = V \qquad v_{-\infty} = V' \qquad v_0 = 0$$

luego

$$V = N_2 + N_3 = \text{número total de raíces positivas}$$
$$V' = N_0 + N_1 = \text{número total de raíces negativas}$$

lo que prueba el corolario.

§ 18.—Determinación del límite superior del número de raíces reales de una ecuación comprendidas entre dos números, por medio de una doble serie de funciones.

El teorema del número anterior se completa por una proposición que vamos á exponer y que da un límite más aproximado del número de raíces reales que la ecuación dada tiene entre dos números cualesquiera.

Sea

$$\varphi(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} x + a_m = 0$$

la ecuación dada. Designemos por *n!* el producto 1 . 2 . 3 . . . . . *n* y consideremos las dos series de funciones definidas por las fórmulas

(1) $$\varphi_v(x) = \frac{(m-v)!}{m!} \cdot E_v \varphi(x)$$

(2) $$\Phi_v(x) = [\varphi_v(x)]^2 - \varphi_{v-1}(x) \cdot \varphi_{v+1}(x)$$

donde v recibe valores desde cero hasta m. Establecemos las condiciones

$$\Phi_0 = 1 \qquad \Phi_m = [\varphi_m(x)]^2$$

cantidades que son ambas positivas.

Tomando eulerianas en (1) y (2) tendremos

(3) $$E_1 \varphi_v(x) = (m-v) \cdot \varphi_{v+1}$$

(4) $$\varphi_v \cdot E_1 \Phi_v(x) = (m-v-1) \cdot [\varphi_{v+1} \cdot \Phi_v + \varphi_{v-1} \cdot \Phi_{v+1}]$$

Prescindiendo de los factores constantes positivos, vemos que la serie de funciones utilizada en el artículo anterior es

$$\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m$$

mientras que ahora emplearemos la doble serie

(5) $$\begin{cases} \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_m \\ \Phi_0, & \Phi_1, & \Phi_2 \ldots\ldots \Phi_m \end{cases}$$

Si consideramos dos términos consecutivos de la misma

$$\varphi_v, \quad \varphi_{v+1}$$
$$\Phi_v, \quad \Phi_{v+1}$$

veremos que, para un valor dado de x que no anula á ninguna de estas cuatro funciones, podrán presentarse los siguientes casos en relación á los signos de cada una de ellas:

a	+ +	+ +	− −	− −	(P P)
	+ +	− −	+ +	− −	
b	+ −	+ −	− +	− +	(V V)
	+ −	− +	+ −	− +	
c	+ +	+ +	− −	− −	(P V)
	+ −	− +	+ −	− +	
d	+ −	+ −	− +	− +	(V P)
	+ +	− −	+ +	− −	

los cuales serán designados por las expresiones

a. Permanencia — permanencia. . . . . . (P P)
b. Variación — variación. . . . . (V V)
c. Permanencia — variación. . . . . . . (P V)
d. Variación — permanencia. . . . . . . (V P)

Podemos así enunciar los dos teoremas siguientes:

I.—*El número de raíces reales de* $\varphi(x) = 0$ *comprendidas entre los números positivos* α *y* β *es igual ó inferior en un número par al número de variaciones-permanencias ganadas ó al de permanencias-permanencias perdidas por la doble serie (5), cuando se sustituya en ella los números* α *y* β. (Corral.)

II.—*El número de raíces de* $\varphi(x) = 0$ *comprendidas entre los números negativos* α *y* β *es igual ó inferior en un número par al número de variaciones-permanencias perdidas ó al de permanencias-permanencias ganadas por la doble serie* (5), *cuando se sustituye en ella los números* α *y* β. (Corral.)

Estos dos teoremas son análogos ó correlativos á la regla de Newton sobre igual cuestión. (Véase la obra citada de Weber, pág. 364 á 368.)

Haremos las hipótesis siguientes, algunas de las cuales demostraremos después:

1.º La ecuación $\varphi(x) = 0$ no tiene raíces múltiples.

2.º Dos funciones consecutivas φ_v y φ_{v+1} no se anulan para el mismo valor de la variable.

3.° Igual propiedad tienen las funciones Φ_v; que dos consecutivas Φ_v y Φ_{v+1} no se reducen á cero al mismo tiempo.

4.° Como consecuencia de la condición 2.ª y de la igualdad (2) se deduce que φ_v y Φ_v no se anulan por el mismo valor de x.

5.° Ninguna de las funciones φ_v ó Φ_v se hace cero para $x = \alpha$ ó $x = \beta$.

Al poner en la doble serie (5) el número α por la variable x, cada una de las funciones presentará un signo correspondiente: para que alguna de ellas le cambie es preciso que pase por cero. Estudiaremos, pues, los casos que pueden ocurrir.

Primer caso.— Una de las funciones intermedias $\varphi_v(x)$ se anula para un valor $x = a$.

Entonces $\Phi_v(a)$ lleva signo contrario al producto

$$\varphi_{v-1}(a) \cdot \varphi_{v+1}(a);$$

$\Phi_{v+1}(a)$ y $\Phi_{v-1}(a)$ serán ambas positivas en virtud de la ecuación (2).

Prescindiendo de un factor numérico, $\varphi_{v+1}(x)$ es la euleriana de $\varphi_v(x)$, luego si $a > 0$ sabemos que $\varphi_v(a+h)$ es de signo contrario á $\varphi_{v+1}(a+h)$, mientras que tienen el mismo signo si $a < 0$; además, $\varphi_v(a-h)$ y $\varphi_{v+1}(a-h)$ son del mismo ó de signos contrarios según que $a > 0$ ó bien $a < 0$.

Por tanto, si $a > 0$, tendremos

	$v-1$	v	$v+1$	$v-1$	v	$v+1$
$\varphi(a-h)$	$\pm$	$\pm$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\pm$
$\varphi(a+h)$	$\pm$	$\mp$	$\pm$	$\mp$	$\mp$	$\pm$
$\Phi(a)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$

de modo que para

$a-h$	P V	P V	V P	P P
$a+h$	V V	V V	P P	V P

Vemos, pues, que en este caso, *el número de variaciones-permanencias y de permanencias-permanencias no varía.*

Si a fuese negativo, tendríamos

	$v-1$	v	$v+1$		$v-1$	v	$v+1$
$\varphi(a-h)$.	$\pm$	$\mp$	$\pm$		$\mp$	$\mp$	$\pm$
$\varphi(a+h)$.	$\pm$	$\pm$	$\pm$		$\mp$	$\pm$	$\pm$
$\Phi(a)$.	$+$	$-$	$+$		$+$	$+$	$+$

por tanto, para

$a-h$.	V V V V		P P V P
$a+h$.	P V P V		V P P P

y entonces el *número de variaciones-permanencias y de permanencias-permanencia tampoco varía.*

Segundo caso.—Que la función dada $\varphi(x)$ *se anule para* $x=a$.

Como entonces Φ_1 es positivo, tendremos para $a>0$

	0	1
$\varphi(a-h)$	$\pm$	$\pm$
$\varphi(a+h)$.	$\mp$	$\pm$
$\Phi(a)$	$+$	$+$

luego, para

$a-h$. . . . . | P P |

y para

$a+h$. . . . . | V P |

por tanto, *si la raíz es positiva se pierde una permanencia-permanencia y se gana una variación-permanencia.*

Si fuese $a<0$, sucedería

	0	1
$\varphi(a-h)$	$\mp$	$\pm$
$\varphi(a+h)$.	$\pm$	$\pm$
$\Phi(a)$	$+$	$+$

y

$a-h$. . . . . | V P | $\qquad$ $a+h$. . . . . | P P |

de modo que *si la raíz es negativa se pierde una variación-permanencia y se gana una permanencia-permanencia.*

Tercer caso.—Que alguna de las funciones intermedias $\Phi_v(x)$ *se anule para* $x=a$.

Entonces $\varphi_{v-1}(a)$ y $\varphi_{v+1}(a)$ tendrán el mismo signo, pues de lo contrario $\Phi_v(a)$ sería una suma de cantidades positivas distintas

de cero; por la igualdad (4) se ve que $E_1\ \Phi_v(a)$ tendrá el mismo signo que el producto $\varphi_{v-1}(a) \cdot \Phi_{v+1}(a) \cdot \varphi_v(a)$ y como podemos elegir h de tal modo que entre $(a - h)$ y $(a + h)$ no existe raíz alguna de $\Phi_{v+1}(x)$, entonces serán $\Phi_{v+1}(a - h)$ y $\Phi_{v+1}(a + h)$ del mismo signo.

Ahora si la raíz a es positiva, $\Phi_v\ (a + h)$ es de signo contrario á $E_1\ \Phi_v(a + h)$ y por tanto al producto

$$\varphi_{v-1}(a + h) \cdot \Phi_{v+1}(a + h) \cdot \varphi_v\ (a + h);$$

también entonces $\Phi_v\ (a - h)$ será del mismo signo que

$E_1\ \Phi_v\ (a - h)$ ó que $\varphi_{v-1}(a - h) \cdot \Phi_{v+1}(a - h) \cdot \varphi_v\ (a - h)$.

Los casos principales que podrán ocurrir serán, pues,

	$v-1$	v	$v+1$	$v-1$	v	$v+1$
φ	+	+	+	+	+	+
$\Phi(a - h)$	+	+	+	−	+	+
$\Phi(a + h)$	+	−	+	−	−	+
φ	+	−	+	+	−	+
$\Phi(a - h)$	+	−	+	−	−	+
$\Phi(a + h)$	+	+	+	−	+	+

y tendremos para

$a \quad h$	P P P P	P V P P	V V V V	V P V V
$a + h$	P V P V	P P P V	V P V P	V V V P

En el primer caso se pierden dos permanencias-permanencias; el segundo y cuarto no ocasionan cambio alguno y en el tercero se ganan dos variaciones-permanencias.

Si la raíz a fuese negativa, $\Phi_v(a + h)$ lleva el mismo signo que $E_1\ \Phi_v\ (a + h)$ y por tanto que $\varphi_{v-1}(a) \cdot \Phi_{v+1}(a + h) \cdot \varphi_v\ (a)$, mientras que $\Phi_v\ (a - h)$ tendrá signo contrario á $E_1\ \Phi_v\ (a - h)$ y á $\varphi_{v-1}(a) \cdot \Phi_{v+1}(a + h) \cdot \varphi_v\ (a)$.

Lo mismo que anteriormente, los casos principales que pueden presentarse, son:

	$v-1$	v	$v+1$	$v-1$	v	$v+1$
φ	+	+	+	+	+	+
$\Phi\ (a-h)$	+	—	+	—	—	+
$\Phi\ (a+h)$	+	+	+	—	+	+
φ	+	—	+	+	—	+
$\Phi\ (a-h)$	+	+	+	—	+	+
$\Phi\ (a+h)$	+	—	+	—	—	+

y entonces para

$a-h$	P V P V	P P P V	V P V P	V V V P
$a+h$	P P P P	P V P P	V V V V	V P V V

En el primer caso se ganan dos permanencias-permanencias, en el segundo y cuarto no ocurre variación alguna y en el tercero se pierden dos variaciones-permanencias.

Siendo positivos los números α y β; presentando para el primero la serie (5) un número $(\mathrm{V\ P})_\alpha$ de variaciones-permanencias y otro $(\mathrm{P\ P})_\alpha$ de permanencias-permanencias, y designando por $(\mathrm{V\ P})_\beta$, $(\mathrm{P\ P})_\beta$ los números análogos para $x=\beta$, tendremos, en virtud de los principios demostrados para las raíces positivas, que si r_p representan el número de ellas comprendidas entre α y β, serán ciertas las igualdades

$$(\mathrm{V\ P})_\alpha + r_p + 2\,k = (\mathrm{V\ P})_\beta$$
$$(\mathrm{P\ P})_\alpha - r_p - 2\,k = (\mathrm{P\ P})_\beta$$

de donde

$$r_p = (\mathrm{V\ P})_\beta - (\mathrm{V\ P})_\alpha - 2\,k \qquad r_p = (\mathrm{P\ P})_\alpha - (\mathrm{P\ P})_\beta - 2\,k$$

lo que está de conformidad con el primer teorema.

Si los números α y β fuesen negativos, entonces tendríamos

$$(\mathrm{V\ P})_\alpha - r_n - 2\,k' = (\mathrm{V\ P})_\beta$$
$$(\mathrm{P\ P})_\alpha + r_n + 2\,k' = (\mathrm{P\ P})_\beta$$

luego

$$r_n = (\mathrm{V\ P})_\alpha - (\mathrm{V\ P})_\beta - 2\,k' \qquad r_n = (\mathrm{P\ P})_\beta - (\mathrm{P\ P})_\alpha - 2\,k'$$

según el enunciado del teorema segundo.

La condición impuesta de que dos funciones φ_v y Φ_v consecutivas no se anulan para el mismo valor de x, puede ser consecuencia de la hipótesis 1.ª que supone á la ecuación dada $\varphi(x) = 0$ desprovista de raíces múltiples. Bastará para ello hacer pequeñas alteraciones en los coeficientes a_v de la función φ de tal modo que las condiciones 2 y 3 sobre las φ_v y Φ_v sean verificadas, y también por otra parte que ninguna de las raíces comprendidas entre α y β salga fuera de este intervalo. El teorema siendo verdad para las funciones φ_v y Φ_v transformadas, lo será igualmente para φ.

Corolario I.—*El número de raíces positivas de* $\varphi(x) = 0$ *es igual ó inferior en un número par al número de* (V P) *que presenta la doble serie de Newton*

$$\text{(6)} \qquad \left\{ \begin{array}{llllll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots & a_m \\ A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & \ldots\ldots & A_m \end{array} \right.$$

en donde

$$A_0 = A_m = 1 \qquad A_v = (m-v) \,.\, v \,.\, a_v^2 - (v+1) \,.\, (m-v+1) \,.\, a_{v-1} \,.\, a_{v+1}$$

Notemos en efecto que

$$\varphi_v(0) = \frac{(m-v)\,!}{m\,!} E_v \, \varphi(0) =$$

$$= \frac{(m-v)\,!}{m\,!} \,.\, m \,.\, (m-1) \ldots\ldots (m-v+1)\, a_m = a_m$$

$$\Phi_v(0) = a_m^2 - a_m^2 = 0$$

luego para $x = 0$ la doble serie formada por las funciones φ_v y Φ_v no presenta más que (P P).

Dando á la variable x el valor $x = +\infty$ el signo de las funciones $\varphi_v\,(x)$ es el mismo que el de su primer término; luego á los efectos que nos interesa podremos escribir

$$\varphi_v(+\infty) = \frac{(m-v)\,!}{m\,!} v\,!\,.\, a_v$$

de donde

$$\Phi_v(+\infty) = \left[\frac{(m-v)\,!}{m\,!} \,.\, v\,!\,.\, a_v\right]^2 -$$

$$- \frac{(m-v+1)\,!\,.\,(v-1)\,!\,.\,(m-v-1)\,!\,.\,(v+1)\,!}{m\,!\,.\,m!} a_{v-1} \,.\, a_{v+1} =$$

$$= \frac{v\,!\,.\,(v-1)\,!\,.\,(m-v)\,!\,.\,(m-v-1)\,!}{m\,!\,.\,m\,!}\Big[(m-v)\,.\,v\,.\,a_v^{\,2} -$$

$$- (v+1)\,.\,(m-v+1)\,a_{v-1}\,.\,a_{v+1}\Big]$$

De aquí deducimos que para $x = +\infty$ la doble serie de funciones φ_v y Φ_v presenta los mismos signos que la (6): luego

$$(\mathrm{V\,P})_0 = 0$$

$(\mathrm{V\,P})_{+\infty} =$ á las (V P) de la doble serie (6) $= (\mathrm{V\,P})_6$; por lo cual

$$r_p = (\mathrm{V\,P})_6 - 2\,k$$

conforme á lo enunciado.

Corolario II.—*El número de raíces negativas de* $\varphi\,(x) = 0$ *es igual ó inferior en un número par al número de las* (P P) *que presenta la doble serie* (6).

Según ya probamos, el número total de raíces negativas viene dado por la expresión

$$r_n = (\mathrm{V\,P})_{-\infty} - (\mathrm{V\,P})_0 - 2\,k'$$

Al cambiar x en $-x$, las variaciones de la serie completa

$$a_0 \quad a_1 \quad a_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, a_m$$

se transforman en permanencias, mientras que el signo de las cantidades

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, A_m$$

permanece invariable; así pues

$(\mathrm{V\,P})_{-\infty} =$ á las (P P) de la doble serie (6) $= (\mathrm{P\,P})_6$

y como

$$(\mathrm{V\,P})_0 = 0$$

tendremos en definitiva

$$r_n = (\mathrm{P\,P})_6 - 2\,k'$$

Corolario III.—*El número de raíces reales de la ecuación* $\varphi\,(x) = 0$ *es igual ó inferior en un número par á la totalidad de las permanencias de la serie* $A_0\ A_1\ A_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, A_m$ *completa.*

Sumando las igualdades correspondientes á los dos corolarios anteriores obtendremos, llamando por R el número total de raíces reales,

$$R = r_n + r_p = (\mathrm{V\,P})_6 + (\mathrm{P\,P})_6 - 2\,k_1$$

siendo de observar que la suma

$(\mathrm{V\,P})_6 + (\mathrm{P\,P})_6 =$ al número de permanencias de la serie simple

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \ldots\ldots A_m$$

Corolario IV. — *El número de raíces imaginarias de* $\varphi(x) = 0$ *es igual ó mayor en un número par á la totalidad de las variaciones de la serie completa* $A_0\ A_1\ A_2 \ldots\ldots A_m$.

No faltándole ningún término á la serie

$$A_0 \quad A_1 \quad A_2 \ldots\ldots A_m$$

será evidente que

$$(\mathrm{P})_A + (\mathrm{V})_A = m$$

si bien el número de sus variaciones $(\mathrm{V})_A$ será siempre par, pues los términos extremos $A_0 = A_m = 1$ tienen el mismo signo.

Como por el corolario anterior

$$R = (P)_A - 2\,k_1$$

y además

$$R + I = m$$

deduciremos definitivamente que

$$I = (\mathrm{V})_A + 2\,k_1$$

conforme al enunciado.

Ejemplo. — Consideremos con Petersen (obra citada, página 197), la ecuación

$$\varphi(x) = x^5 - 3\,x^4 + 2\,x^3 - 8\,x^2 + 3\,x - 25 = 0$$

que carece de raíces negativas según se comprueba inmediatamente por la regla de Descartes. Aplicando nuestro teorema I del § 16 á esta ecuación cambiada de signo, y á su transformada en $\frac{1}{x}$, se de-

ducirá que 1 es límite inferior de las raíces positivas y 4 el límite superior de las mismas. Tendremos pues

$$E_1\,\varphi(x) = -3\,x^4 + 4\,x^3 - 24\,.\,x^2 + 12\,.\,x - 125$$
$$E_2\,\varphi(x) = 4\,x^3 - 48\,.\,x^2 + 36\,.\,x - 500$$
$$E_3\,\varphi(x) = -48\,.\,x^2 + 72\,.\,x - 1500$$
$$E_4\,\varphi(x) = 72\,x - 3000$$
$$E_5\,\varphi(x) = -3000$$

de modo que aplicando las fórmulas (1) y (2) se formarán las siguientes series de funciones:

$\varphi_0(1) = -30$	$\Phi_0(1) = 1$
$\varphi_1(1) = 4! \times -136 = -3264$	$\Phi_1(1) = (3264)^2 - 30 \times 3048 = 10562256$
$\varphi_2(1) = -3048$	$\Phi_2(1) = (3048)^2 - 3264 \times 2952 = -345024$
$\varphi_3(1) = -2952$	$\Phi_3(1) = (2952)^2 - 3048 \times 2928 = -210240$
$\varphi_4(1) = -2928$	$\Phi_4(1) = (2928)^2 - 2952 \times 3000 = -282816$
$\varphi_5(1) = -3000$	$\Phi_5(1) = (3000)^2 = 9000000$
$\varphi_0(4) = +243$	$\Phi_0(4) = 1$
$\varphi_1(4) = -23352$	$\Phi_1(4) = (23352)^2 + 243 \times 5208$
$\varphi_2(4) = -5208$	$\Phi_2(4) = (5208)^2 - 23352 \times 3960 = -65350656$
$\varphi_3(4) = -3960$	$\Phi_3(4) = (3960)^2 - 5208 \times 2712 = +1557504$
$\varphi_4(4) = -2712$	$\Phi_4(4) = (2712)^2 - 3960 \times 3000 = -4525056$
$\varphi_5(4) = -3000$	$\Phi_5(4) = (3000)^2 = 9000000$

Resultará, por tanto, para $x = 1$ la doble serie de signos

$$\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & - & - \\ + & + & - & - & - & + \end{array}$$

en donde

$$(VP)_1 = 0 \qquad\qquad (PP)_1 = 3$$

mientras que para $x = 4$ se tendrá

$$\begin{array}{cccccc} + & - & - & - & - & - \\ + & + & - & + & - & + \end{array}$$

siendo

$$(VP)_4 = 1 \qquad\qquad (PP)_4 = 0$$

Según nuestro teorema I, como al pasar de $x = 1$ á $x = 4$ se ha ganado una variación-permanencia en la doble serie de funciones φ, Φ, la ecuación dada tiene un sola raíz positiva, siendo las cuatro restantes imaginarias.

§ 19.—Ecuaciones cuyas raíces son reales.

Teorema I.—*Entre dos raíces reales consecutivas y del mismo signo de la ecuación* $f(x) = 0$, *existe una ó un número impar de raíces reales de la ecuación* $E_1 f(x) = 0$ *obtenida igualando á cero la euleriana de* $f(x)$. (Corral).

Esta proposición es análoga ó correlativa al conocidísimo teorema de Rolle.

Sean α y β las dos raíces reales consecutivas y del mismo signo de la ecuación dada $f(x) = 0$. Suponiendo que sus grados de multiplicidad respectivos sean a y b tendremos

$$(1) \qquad f(x) = (x - \alpha)^a \cdot (x - \beta)^b \cdot f_1(x)$$

En el intervalo α, β las funciones $f(x)$ y $f_1(x)$ tienen un signo invariable, pues de lo contrario ambas admitirían una raíz, por lo menos, comprendida entre α y β; lo que es contra hipótesis.

Tomando eulerianas en los dos miembros de (1), resulta

$$(2) \qquad \frac{(x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot E_1 f(x)}{f(x)} = -a \cdot \alpha \cdot (x-\beta) - b \cdot \beta \cdot (x-\alpha) + \\ + \frac{(x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot E_1 f(x)}{f_1(x)}$$

Siendo α y β las dos positivas ó negativas, podremos suponer

$$\alpha > \beta$$

y entonces para $x = \alpha$ el segundo miembro de (2) toma el valor

$$-a \cdot \alpha \cdot (\alpha - \beta) \gtrless 0 \quad \text{si} \quad \alpha \lessgtr 0$$

mientras que para $x = \beta$ valdrá

$$-b \cdot \beta \cdot (\beta - \alpha) \lessgtr 0 \quad \text{si} \quad \beta \lessgtr 0$$

Así pues, con las suposiciones hechas, al crecer x de β á α el segundo miembro de (2) pasa por cero una vez ó un número impar de veces: lo mismo tendrá que ocurrir, evidentemente, con el primer miembro. Como al variar x desde α hasta β, las funciones $(x - \alpha)$, $(x - \beta)$ y $f(x)$ conservan un signo constante, será preciso entonces que $E_1 f(x)$

pase por cero, en el intervalo α, β, una vez ó un número impar de veces.

Corolario I.—*Si la ecuación completa $f(x) = 0$ de grado m tiene todas sus raíces reales y del mismo signo, la ecuación $E_1 f(x) = 0$ tendrá igualmente todas sus raíces reales, y dos raíces consecutivas de la segunda ecuación comprenderán siempre una raíz de la primera.* (Corral.)

Llamemos

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_n$$

las raíces de $f(x) = 0$, cuyos grados de multiplicidad son, respectivamente,

$$m_1 , m_2 , m_3 \ldots\ldots , m_n$$

por lo cual

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots\ldots + m_n = m$$

Según probamos oportunamente al tratar de las ecuaciones con raíces múltiples, la euleriana $E_1 f(x)$ tendrá también de raíces á los números x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_n$ con grados de multiplicidad iguales á $(m_1 - 1)$, $(m_2 - 1)$, $(m_3 - 1) \ldots\ldots (m_n - 1)$. Pero como el teorema anterior indica que la ecuación $E_1 f(x) = 0$ tiene además una raíz entre x_1 y x_2, otra entre x_2 y x_3 y así sucesivamente hasta la comprendida de x_{n-1} á x_n, resultará una totalidad de $m_1 - 1 + (m_2 - 1) + (m_3 - 1) + \ldots\ldots (m_n - 1) + n - 1 = m - 1$ raíces para $E_1 f(x) = 0$. De aquí deducimos que todas las raíces de $E_1 f(x)$ serán reales, pues tal función es de grado $(m - 1)$, así como también que entre dos raíces de $f(x) = 0$ no existe más que una sola raíz de $E_1 f(x) = 0$.

Designando por

$$a_1 , a_2 , a_3 \ldots\ldots a_{n-1}$$

las $(n - 1)$ raíces de $E_1 f(x) = 0$ que hemos mencionado y que se encuentran comprendidas en los $(n - 1)$ intervalos de la serie

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_n$$

nos resultará evidente que las raíces de $f(x) = 0$ están á su vez comprendidas en los n intervalos de la serie

$$0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots\ldots + \infty$$

si el signo de las raíces es positivo, ó de la

$$0 \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ldots\ldots - \infty$$

en el caso de que todas las raíces fuesen negativas. Podemos decir, por tanto, que las raíces distintas de $E_1 f(x) = 0$ separan á las raíces diferentes de $f(x) = 0$.

Corolario II.—*Dos raíces consecutivas y del mismo signo* α, β *de la ecuación* $E_1 f(x) = 0$ *no pueden comprender entre sí más de una raíz de* $f(x) = 0$. (Corral.)

Porque si hubiese dos raíces a y b de $f(x) = 0$ en el intervalo α, β, la ecuación $E_1 f(x) = 0$ tendría por lo menos una raíz γ comprendida entre a y b, y, por tanto, entre α y β : lo que es contra el supuesto

Corolario III.—*Si la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene todas sus raíces reales y del mismo signo, ocurrirá igual con las funciones* $E_1 f(x)$, $E_2 f(x)$, $E_3 f(x) \ldots\ldots$ *Si una de estas eulerianas* $E_v f(x)$ *admite una raíz* α *con un orden de multiplicidad* a *mayor que uno,* α *será raíz de orden* $a + v$ *de* $f(x) = 0$. (Corral.)

Esta proposición es la consecuencia de aplicar repetidas veces el corolario I.

Aplicaciones.

Ecuaciones trinomias con exponentes impares.

La ecuación considerada tiene la forma

$$f(x) = x^m + p \cdot x^n + q = 0$$

siendo m y n números *impares*. Aplicando la regla de los signos de Descartes, es fácil ver que el coeficiente p debe ser negativo para que la ecuación tenga tres raíces reales; observándose también que

cuando p y q son negativos la ecuación puede tener dos raíces reales negativas, mientras que cuando $p < 0$, $q > 0$ es posible la existencia de dos raíces reales positivas.

Investiguemos ahora cuáles son todas las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación dada tenga tres raíces reales, siendo dos de ellas positivas; ó bien tres raíces reales, pero dos de ellas negativas. No es posible que las tres raíces reales sean al mismo tiempo positivas ó negativas.

Primer caso.—Tres raíces reales, de las cuales son dos positivas.— Estas dos raíces positivas comprenden una raíz real de la ecuación euleriana

$$E_1 f(x) = (m - n) \cdot p \cdot x^n + m \cdot q = 0$$

cuyas dos raíces reales son

$$x = \pm \sqrt[n]{- \frac{m \cdot q}{(m - n) \cdot p}}$$

La primera condición á satisfacer es

$$p \cdot q < 0 \text{ y como } p < 0 \text{ será } q > 0 .$$

Resulta por tanto que la raíz positiva

$$b' = + \sqrt[n]{- \frac{m\, q}{(m - n)\, p}}$$

de la ecuación euleriana, estará comprendida entre las dos raíces (b y c) positivas de la ecuación trinomia. Designando por a la raíz real negativa de la misma, formaremos la siguiente serie

$$\overbrace{-\infty \qquad a}^{-} \quad \overbrace{\qquad b}^{+} \quad \overbrace{\quad b' \quad c}^{-} \quad \overbrace{\quad + \infty}^{+}$$

en donde los signos superiores indican el resultado de sustituir en la función dada dichos valores. Se tendrá, pues,

$$f(b') < 0 .$$

Recíprocamente, si la ecuación satisface simultáneamente las condiciones

$$p < 0 \qquad q > 0 \qquad f(b') < 0$$

resultará que entre b' y $+\infty$ existe una raíz real positiva, así como

otra entre b' y 0; luego la ecuación trinomia tendrá **tres raíces reales**, siendo dos de ellas positivas.

Realizando operaciones obtendremos

$$\left(-\frac{m\,q}{(m-n)\,p}\right)^{\frac{m}{n}} - p\cdot\frac{m\cdot q}{(m-n)\,p} + q < 0$$

ó bien

$$\left(-\frac{m\cdot q}{(m-n)\,p}\right)^{\frac{m}{n}} < \frac{n\cdot q}{m-n}$$

Ambos miembros de esta desigualdad son cantidades positivas por lo que pueden elevarse á la potencia n, resultando en definitiva

$$\left(\frac{n\cdot q}{m-n}\right)^{n} + \left(\frac{m\cdot q}{(m-n)\,p}\right)^{m} > 0 \qquad (\alpha)$$

ya que m es impar.

La desigualdad (α) *junto con las* $p < 0$, $q > 0$, ***representan las condiciones buscadas.*** (Corral.)

Puede deducirse fácilmente la relación

$$\left(\frac{n\,p}{m}\right)^{m} + \left(\frac{n\cdot q}{m-n}\right)^{m-n} < 0 \qquad (a)$$

que todos los autores indican como *característica para que la ecuación dada tenga tres raíces reales* y que es una **consecuencia del teorema de Rolle**. Basta para ello observar que

$$\left(\frac{n\,p}{m}\right)^{m} = \left(\frac{\dfrac{n\cdot q}{m-n}}{\dfrac{m\cdot q}{(m-n)\cdot p}}\right)^{m} = \frac{\left(\dfrac{n\cdot q}{m-n}\right)^{m}}{\left(\dfrac{m\cdot q}{(m-n)\cdot p}\right)^{m}}$$

y como de (α) se obtiene

$$\left(\frac{m\cdot q}{(m-n)\,p}\right)^{m} > -\left(\frac{n\cdot q}{m-n}\right)^{n}$$

resultará

$$\left(\frac{n\,p}{m}\right)^{m} < -\frac{\left(\dfrac{n\cdot q}{m-n}\right)^{m}}{\left(\dfrac{n\cdot q}{m-n}\right)^{n}} = -\left(\frac{n\,q}{m-n}\right)^{m-n}$$

conforme deseábamos.

Segundo caso.—Tres raíces reales, de las cuales son dos negativas. —En este caso se tendrá, ante todo,

$$p \cdot q > 0 \qquad p < 0 \qquad q < 0$$

Llamando a y b las dos raíces reales negativas de la ecuación trinomia, su euleriana $E_1\, f(x)$ tendrá necesariamente una raíz negativa comprendida entre aquellas y que valdrá

$$a' = + \sqrt[n]{- \frac{m \,.\, q}{(m - n) \,.\, p}}$$

Obtendremos, como antes, la siguiente serie de valores

$$\overbrace{-\infty \quad a}^{-} \; \overbrace{\quad a' \quad b}^{+} \; \overbrace{\quad c}^{-} \; \overbrace{\quad +\infty}^{+}$$

en donde c representa la única raíz positiva de la ecuación. Se tendrá pues

$$f(a') > 0$$

Recíprocamente, si la ecuación trinomia satisface al mismo tiempo las desigualdades

$$p < 0 \qquad q < 0 \qquad f(a') > 0$$

resultará que entre $-\infty$ y a' habrá una raíz real negativa, así como también entre a' y 0; luego la ecuación dada tendrá tres raíces reales, siendo dos de ellas negativas.

Efectuando operaciones se obtendrá

$$\left(- \frac{m \,.\, q}{(m - n) \,.\, p}\right)^{\frac{m}{n}} - p \cdot \frac{m \,.\, q}{(m - n) \,.\, p} + q > 0$$

ó bien

$$\left(- \frac{m \,.\, q}{(m - n) \,.\, p}\right)^{\frac{m}{n}} > \frac{n \,.\, q}{m - n}$$

Esta desigualdad no cambia de sentido elevando sus dos miembros negativos á la potencia impar n; luego

$$\left(\frac{m \,.\, q}{(m - n) \,.\, p}\right)^{m} + \left(\frac{n \,.\, q}{m - n}\right)^{n} < 0 \qquad (\beta)$$

La desigualdad (β) *en unión á las* $p < 0$, $q < 0$ *indican todas las condiciones buscadas.* (Corral.)

También en este caso puede llegarse á la relación característica (a), pues como

$$\left(\frac{m \cdot q}{(m-n)\, p}\right)^m < -\left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^n$$

resultará

$$\left(\frac{n \cdot p}{m}\right)^m = \frac{\left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^m}{\left(\frac{m \cdot q}{(m-n) \cdot p}\right)^m} < - \frac{\left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^m}{\left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^n} = -\left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^{m-n}$$

ya que se trata de fracciones de numerador negativo y denominador positivo.

Cuando se tenga

$$\left(\frac{m \cdot q}{(m-n) \cdot p}\right)^m + \left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^n = 0 \qquad \text{(b)}$$

la ecuación trinomia poseerá tres raíces reales, siendo dos de ellas iguales entre sí. Pues entonces la raíz real

$$x = + \sqrt[n]{-\frac{m \cdot q}{(m-n) \cdot p}}$$

de la ecuación

$$E_1 f(x) = (m-n) \cdot p \cdot x^n + m \cdot q = 0$$

es también raíz real de la ecuación trinomia, lo que prueba la existencia en ésta de una raíz real doble, circunstancia que demuestra á su vez tiene que haber tres raíces reales en la ecuación dada.

De la igualdad (b) se deduce fácilmente que

$$\left(\frac{n \cdot p}{m}\right)^m + \left(\frac{n \cdot q}{m-n}\right)^{m-n} = 0$$

bajo cuya forma se expresa, por todos los Autores, las condiciones á que debe satisfacer la ecuación trinomia para que se verifique el caso actual.

Ecuación trinomia de tercer grado. Tiene por expresión

$$x^3 + p \cdot x + q = 0$$

siendo entonces

$$m = 3 \qquad n = 1$$

Las tres proposiciones anteriormente enunciadas dan aquí:

1.° Las condiciones necesarias y suficientes para que la ecuación trinomia de tercer grado tenga tres raíces reales, entre las cuales haya dos positivas, es que sus coeficientes satisfagan las tres desigualdades

$$p < 0 \qquad q > 0 \qquad \left(\frac{3}{2}\frac{q}{p}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right) > 0$$

Está última relación, en virtud de las primeras, se transforma en

$$27 \cdot q^2 + 4 \cdot p^3 < 0$$

y unida á la

$$q > 0$$

bastan entre ellas dos para definir este caso.

2.° Para que en la ecuación existan tres raíces reales siendo dos de ellas negativas, será necesario y suficiente que

$$\left(\frac{3}{2}\frac{q}{p}\right)^3 + \frac{q}{2} < 0 \quad p < 0 \quad q < 0$$

ó bien

$$27 q^2 + 4 p^3 < 0 \quad q < 0$$

3.° La ecuación trinomia tendrá una raíz doble y la tercera real cuando

$$\left(\frac{3}{2}\frac{q}{p}\right)^3 + \frac{q}{2} = 0$$

ó sea

$$27 \cdot q^2 + 4 \cdot p^3 = 0$$

El valor de la raíz doble será

$$x = + \sqrt[n]{-\frac{m \cdot q}{(m - n) \cdot p}} = -\frac{3 \cdot q}{2 \cdot p}$$

siendo la tercera igual á

$$-\frac{q}{\left(-\frac{3 q}{2 \cdot p}\right)^2} = -\frac{4 p^2}{9 \cdot q} = \frac{3 \cdot q}{p}$$

Ecuación general de tercer grado. De su forma completa

$$y^3 + p . y^2 + q . y + r = 0$$

puede reducirse á la expresión

$$x^3 + \left(q - \frac{p^3}{3}\right) x + \frac{2 p^3}{27} - \frac{p . q}{3} + r = 0$$

por medio de la sustitución

$$y = x - \frac{p}{3}$$

siendo entonces

$$p' = q - \frac{p^3}{3} \qquad q' = \frac{2 p^3}{27} - \frac{p . q}{3} + r$$

La característica de *realidad* para las tres raíces de la ecuación general de tercer grado será, según hemos visto,

$$27 q'^2 + 4 . p'^3 < 0$$

ó bien

$$27 \left(\frac{2 p^3}{27} - \frac{p . q}{3} + r\right)^2 + 4 . \left(q - \frac{p^3}{3}\right)^3 < 0$$

y efectuando operaciones resulta

$$4 . q^3 - p^2 . q^2 + 4 . p^3 . r - 18 . p . q . r + 27 . r^2 < 0 \qquad (c)$$

Dicha condición envuelve consigo la

$$q - \frac{p^3}{3} < 0$$

por lo cual no es necesario mencionar esta última.

Tratemos ahora de aplicar nuestro teorema correlativo al de Rolle para encontrar las condiciones que satisfacen los coeficientes de la ecuación general de tercer grado cuando sus tres raíces son *reales y del mismo signo*. La ecuación euleriana es

$$E_1 f(x) = p . x^2 + 2 q . x + 3 . r = 0$$

valiendo sus dos raíces

$$x = \frac{- q \pm \sqrt{q^2 - 3 \ p . r}}{p}$$

Una primera condición necesaria es que las dos raíces de la euleriana sean reales, para lo cual

$$q^2 - 3 p . r > 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Las tres raíces reales de la ecuación podrán ser todas positivas ó negativas.

Primer caso.—Las tres raíces son positivas.—Designando dichas raíces por a, b, c colocadas según orden creciente, tendremos que

$$a' = -\frac{q}{p} + \frac{1}{p} \cdot \sqrt{q^2 - 3\,p \cdot r}$$

$$b' = -\frac{q}{p} - \frac{1}{p} \cdot \sqrt{q^2 - 3\,p \cdot r}$$

estarán comprendidas respectivamente entre a, b y b, c. Podremos, pues, formar la siguiente serie de valores

$$\overbrace{0 \quad\quad a}^{-} \;\; \overbrace{a' \quad\quad b}^{+} \;\; \overbrace{b' \quad\quad c}^{-} \;\; \overbrace{\quad\quad +\infty}^{+}$$

que sustituídos en la ecuación dada producen los signos aquí indicados. Por ser las tres raíces reales y positivas se deberá tener

$$p < 0 \qquad q > 0 \qquad r < 0$$

de modo que

$$p \cdot r > 0$$

Al hacer $x = 0$, el primer miembro de la ecuación se reduce á $r < 0$ y permanecerá negativo hasta que se llegue al valor $x = a$, que es la más pequeña de las tres raíces consideradas; de $x = a$ hasta $x = b$ este primer miembro será positivo, así es que

$$f\,(a') > 0 \tag{4}$$

Entre los valores $x = b$ y $x = c$ la función $f\,(x)$ tomará signo negativo, por lo cual

$$f\,(b') < 0 \tag{5}$$

permaneciendo luego después positiva de $x = c$ á $x = +\infty$.

Si realizamos las operaciones indicadas, las desigualdades (4) y (5) se convierten en

$$\frac{\sqrt{q^2 - 3\,p \cdot r}}{p^3}\,(4\,q^2 - 3\,p \cdot r - p^2\,q) + \\ + \frac{1}{p^3}\,(-\,4\,q^3 + 9\,p \cdot q \cdot r + p^2\,q^2 - 2\,p^3\,r) > 0 \tag{6}$$

$$\frac{\sqrt{q^2 - 3\,p \cdot r}}{p^3}\,(-\,4\,q^2 + 3\,p \cdot r + p^2\,q) + \\ + \frac{1}{p^3}\,(-\,4\,q^3 + 9\,p \cdot q \cdot r + p^2\,q^2 - 2\,p^3\,r) < 0 \tag{7}$$

Restada la (7) de la (6) obtendremos

$$2 \cdot \frac{\sqrt{q^2 - 3pr}}{p^3} (4q^2 - 3pr - p^2 q) > 0$$

y siendo

$$p^3 < 0 \qquad + \sqrt{q^2 - 3pr} > 0$$

se deducirá la condición

$$4q^2 - 3p \cdot r - p^2 q < 0 \tag{8}$$

que es satisfecha por todas las ecuaciones de tercer grado cuyas raíces son reales y positivas.

Designando por

$$\alpha = \frac{\sqrt{q^2 - 3p \cdot r}}{p^3} (-4q^2 + 3p \cdot r + p^2 \cdot q)$$

$$\beta = \frac{1}{p^3} (-4q^3 + 9p \cdot q \cdot r + p^2 q^2 - 2p^3 r)$$

las desigualdades (6) y (7) toman la forma

$$\alpha + \beta < 0 \qquad \beta - \alpha > 0$$

de donde

$$\left.\begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \alpha < -\beta \end{array}\right\} \tag{9}$$

La cantidad α es siempre negativa según demostramos. En cuanto á β puede ser positiva ó negativa. En el primer caso, la desigualdad

$$\alpha < -\beta$$

tiene sus dos miembros negativos, luego al elevarla al cuadrado cambia de sentido, es decir, que

$$\alpha^2 > \beta^2 \tag{10}$$

Cuando β fuese negativo, entonces se llegará al mismo resultado (10), considerando la desigualdad

$$\alpha < \beta .$$

Observando que β puede ponerse bajo la forma

$$\beta = + \frac{q}{p^3} (-4q^2 + 3p \cdot r + p^2 q) + \frac{2r}{p^2} (3q - p^2)$$

la desigualdad (10) llegará á valer, después de multiplicar sus dos miembros por p^6,

$$(3q - p^2) \cdot [4r^2 \cdot p^2 \cdot (3q - p^2) + 4 \cdot p \cdot q \cdot r \cdot (-4q^2 + 3p \cdot r + p^2 q)] + \\ + 3p \cdot r \cdot (-4q^2 + 3p \cdot r + p^2 q)^2 < 0$$

Realizando operaciones y dividiendo por $p^3 \cdot r > 0$ se obtiene

$$4 \cdot q^3 + 4 \cdot p^3 \cdot r - p^2 q^2 - 18\, p \cdot q \cdot r + 27 \cdot r^2 < 0$$

que es la condición (c) encontrada antes, y que debe cumplirse por ser las tres raíces reales.

Segundo caso.—Las tres raíces son negativas.—Se tendrá entonces

$$p > 0 \qquad q > 0 \qquad r > 0 \qquad p \cdot r > 0$$

de modo que

$$b' < a'$$

Siendo $a < b < c$ las tres raíces de la ecuación, según orden creciente, formaremos la serie siguiente:

$$\underbrace{0 \quad c}_{+} \quad \underbrace{a' \quad b}_{-} \quad \underbrace{b' \quad a}_{+} \quad \underbrace{\quad -\infty}_{-}$$

de donde se deducen las desigualdades

$$f(a') < 0 \qquad\qquad f(b') > 0$$

que combinadas entre sí producen

$$2 \cdot \frac{\sqrt{q^2 - 3p \cdot r}}{p^3} (4 \cdot q^2 - 3 \cdot p \cdot r - p^2 \cdot q) < 0$$

y como

$$p^3 > 0 \qquad\qquad + \sqrt{q^2 - 3p \cdot r} > 0$$

resultará en definitiva

$$4q^2 - 3pr - p^2 q < 0$$

que es la misma desigualdad (8) del caso anterior.

Del mismo modo que antes se demuestra aquí que la relación (c) es satisfecha por los coeficientes de la ecuación.

Como resumen de este análisis podemos enunciar la proposición siguiente:

Cuando las raíces de una ecuación de tercer grado son todas reales y de igual signo, las tres desigualdades

$$4q^3 + 4p^3 r - p^2 q^2 - 18pqr + 27r^2 < 0 \qquad (9)$$

$$4q^2 - 3p \cdot r - p^2 q < 0 \qquad (10)$$

$$q^2 - 3pr > 0 \qquad (11)$$

son satisfechas por los coeficientes de la misma: (Corral.)

La condición (9) se verifica siempre que las tres raíces de la ecuación sean reales, mientras que las (10) y (11) son especiales para el caso de que todas dichas raíces tengan el mismo signo.

Así la ecuación

$$x^3 - 10 \cdot x^2 + 31 \cdot x - 30 = 0$$

en donde

$$p = -10 \qquad q = 31 \qquad r = -30$$

satisface las tres condiciones (9), (10) y (11); sus tres raíces son reales y positivas.

§ 20.—**Límites del número de raíces complejas de una función real con parte imaginaria positiva ó negativa.**

En los § 1 y § 2, hemos dado á conocer el procedimiento exacto para calcular la diferencia entre el número de raíces complejas de una función real que tienen parte imaginaria positiva y el número de los que poseen coeficiente imaginario negativo, pero comprendidas ambas en un contorno dado.

Cuando no se trata más que de saber un límite superior del número total de raíces imaginarias de la función real dada, la cuestión puede simplificarse algún tanto. Suponiendo que

$$F(z) = \alpha(x) \cdot [\varphi(xy) + i \cdot y \cdot \theta(xy)]$$

sea la función real supuesta que admite raíces reales y complejas; podemos enunciar la proposición siguiente:

Teorema I. — *Si la curva f cuyas ordenadas son todas positivas se encuentra dividida por la curva φ en $2p$ segmentos, sobre los cuales φ es alternadamente positivo y negativo, el número de las raíces de $F(z)$ situadas en el interior del contorno f es á lo más igual á p; cosa análoga ocurre cuando f está dividido por θ en $2p$ segmentos para los cuales la misma condición queda satisfecha.* (Corral.)

Según el § 2 la característica del sistema de las funciones f, φ y θ vale

$$K = \frac{1}{2}\left[E(f;\varphi,\theta) - S(f;\varphi,\theta)\right] = S_\varepsilon$$

ya que la curva f por estar en la región de las ordenadas positivas no comprende más que puntos de salida $S(\varphi,\theta)$ interiores á dicho contorno, los cuales son todos raíces complejas de $F(z)$ que tienen parte imaginaria positiva.

Como la curva f es encontrada por la φ en $2\,p$ puntos, tendremos evidentemente

$$p = \frac{1}{2}\left[E(f;\varphi,\theta) + S(f;\varphi,\theta)\right]$$

luego en definitiva

$$S_3 = p - S(f;\varphi,\theta)$$

y como

$$S(f;\varphi,\theta) > 0$$

deducimos que

$$S_\varepsilon \leqq p. \qquad\qquad (c.a.e).$$

Se razonaría de un modo análogo para demostrar la segunda parte de este teorema, ya que también

$$K = S_3 = \frac{1}{2}\left[E(f;\theta,\varphi) - S(f;\theta,\varphi)\right]$$

Conviene observar que siendo $F(z)$ una función entera y real á cada raíz compleja $a + i\,.\,b$ existirá otra $a - i\,b$; luego á las $S_3(\varphi,\theta)$ raíces con parte imaginaria positiva, corresponderán en la región inferior del plano otros tantos $E'_\sigma(\varphi,\theta)$ que serán exteriores al contorno f, pero también raíces de $F(z) = 0$.

CAPÍTULO IV

Número exacto de raíces reales de una ecuación.

---

§ 21.—Raíces reales entre dos números dados.

Teorema I.—*Si se aplica al primer miembro de una ecuación $f(x) = 0$ y á su euleriana $E_1 f(x)$ el procedimiento conocido para encontrar el máximo común divisor de las dos funciones, con la sola condición de cambiar de signo á los restos antes de pasar á ser divisores, hallaremos la serie siguiente de funciones*

(1) $$f(x),\ E_1 f(x),\ X_1,\ X_2,\ X_3 \ldots\ldots X_{r-1},\ X_r$$

cuyos grados con relación á x van en escala decreciente.

Siendo α y β dos cantidades reales cualesquiera, sustituiremos en (1) *á x por α anotando la serie de signos que así resulte para contar el número de variaciones; después haremos la sustitución en* (1) *de x por β, observando también el número de variaciones que presenta la nueva serie de signos. La diferencia entre el primer número de variaciones y el segundo es igual al exceso del número de raíces negativas sobre el número de las positivas que la ecuacion $f(x) = 0$ tiene comprendidas entre α y β.* (Corral.)

El teorema así enunciado resuelve el problema de encontrar el número exacto de raíces reales de una ecuación comprendidas entre dos números dados. Es de tanta importancia práctica como el bri-

llante teorema de Sturm, presentando en sus aplicaciones cálculos análogos, ya que las operaciones numéricas que en ambos se realizan presentan la misma complicación, pues la derivada de la función dada

$$f'(x) = m \cdot a_0 \cdot x^{m-1} + (m-1) \cdot a_1 \cdot x^{m-2} + \\ + (m-2) \cdot a_2 \cdot x^{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-1}$$

es tan sencilla y fácil de formar como su euleriana

$$E_1 f(x) = a_1 x^{m-1} + 2 \cdot a_2 x^{m-2} + 3 \cdot a_3 x^{m-3} + \ldots\ldots + \\ + (m-1) a_{m-1} x + m \cdot a_m$$

La serie (1) goza además de propiedades diferentes á las llamadas *series de* Sturm, de modo que es imposible confundir ambas proposiciones, diferentes entre sí, pero que resuelven de un modo semejante el mismo problema.

Podemos decir que se trata de un teorema, que es en cierto modo correlativo al de Sturm.

En las aplicaciones prácticas de encontrar el número de raíces reales de una ecuación numérica, las cantidades α y β se sustituyen sucesivamente por

(p) $\alpha = 0 \ldots\ldots \beta =$ límite superior de las raíces positivas.
(n) $\beta' = 0 \ldots\ldots \alpha' =$ límite inferior de las raíces negativas

y entonces el teorema nos da, llamando por V las variaciones contadas en la serie (1) para los primeros valores y V′ las variaciones que se presentan en (1) cuando ponemos los segundos límites, que

$V_\beta - V_0 = p =$ número total de raíces positivas de $f(x) = 0$.
$V_0 - V'_{\alpha'} = n =$ número total de raíces negativas de $f(x) = 0$.

Para demostrar el importante teorema enunciado, empezaremos por suponer que la ecuación dada $f(x) = 0$ tiene todas sus raíces desiguales.

Por ser las funciones $X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_r$ los residuos que se obtienen (cambiados de signo) al efectuar las operaciones del procedimiento clásico empleado para deducir el máximo común divisor de $f(x)$ y $E_1 f(x)$, tendremos que se verificarán las siguientes igualdades

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} f(x) = E_1 f(x) \,.\, Q - X_1 \\ E_1 f(x) = X_1 \cdot Q_1 - X_2 \\ X_1 = X_2 \cdot Q_2 - X_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{n-1} = X_n \cdot Q_n - X_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_{r-2} = X_{r-1} \cdot Q_{r-1} - X_r \end{array}\right.$$

He aquí ahora las propiedades de la serie (1):

1.° *Dos funciones consecutivas de* (1) *no pueden anularse para el mismo valor de* x *comprendido entre* α y β.

Las dos primeras $f(x)$ y $E_1\, f(x)$ satisfacen esta cualidad ya que por hipótesis $f(x) = 0$ no tiene raíces múltiples. Además, si fuera simultáneamente

$$X_{n-1} = 0 \qquad\qquad X_n = 0$$

entonces por la igualdad

$$X_{n-1} = X_n\, Q_n - X_{n+1}$$

resultaría también $X_{n+1} = 0$. Así sucesivamente llegaríamos á deducir que $X_r = 0$, lo que es imposible desde el momento que X_r es una constante diferente de cero, según se desprende del procedimiento mismo del *m . c . d*

2.° *La función* X_r *no se anula para ningún valor de* x *entre* α *y* β, *conservando siempre un signo constante para todos los valores de dicho intervalo.*

3.° *Cuando una de las funciones de la serie* (1), *distinta á la primera, se anula por un valor de* x *comprendido entre* α *y* β, *las funciones próximas, anterior y posterior á ella, son iguales pero de signos contrarios.*

Si efectivamente

$$X_n = 0$$

entonces la igualdad

$$X_{n-1} = X_n \cdot Q_n - X_{n+1}$$

nos dará

$$X_{n-1} = - X_{n+1}\,.$$

4.° *La relación ó cociente* $\dfrac{f(x)}{E_1 f(x)}$ *de las dos primeras funciones*

de la serie (1) *pasa de positiva á negativa para un valor positivo de* x *que la anule, y de negativa á positiva cuando dicho valor de* x *sea negativo, y suponemos que la variable* x *crece desde* α *hasta* $\beta > \alpha$. (Corral.)

Esta última cualidad la demostraremos después.

Si en la serie (1) sustituímos por x un número cualquiera, cada uno de sus términos presentará un cierto signo; para que dicha serie cambie de signos, será preciso que algunas de sus funciones experimente dicha variación ó sea que se anule para valores de x comprendidos entre α y β.

Como consecuencia de las propiedades anteriores, podemos establecer:

Primer principio.—Si se anula alguna de las funciones intermedias de la serie (1) *para un cierto valor de* x *comprendido entre* α *y* β, *ya sea positivo ó negativo, el número de variaciones de* (1) *no se altera.*

Supongamos que X_n sea la función que se anule para el valor particular de $x = a$; entonces según sabemos $X_{n-1} = -X_{n+1}$.

Llamando por h una cantidad tan pequeña como sea preciso para que $(a - h)$ y $(a + h)$ no comprendan ninguna raíz de $X_{n-1} = 0$ y $X_{n+1} = 0$, se tendrá que cada uno de estos dos polinomios llevará el mismo signo para los valores

$$x = a - h \qquad x = a \qquad x = a + h;$$

pero como al ser $x = a$ llevan ellos signos contrarios, será evidente que también lo llevarán cuando x tenga los otros dos valores. Así pues

	X_{n-1}		X_n		X_{n+1}
$x = a - h$	$\pm$	.....	$\pm$	.....	$\mp$
$x = a$	$\pm$	.....	0	.....	$\mp$
$x = a + h$	$\pm$	.....	$\mp$	.....	$\mp$

por donde vemos que *el número de variaciones es el mismo en los tres casos,* no ocurriendo igual con las permanencias.

Segundo principio.—Si para un cierto valor positivo de x *se anula* $f(x)$, *la serie de signos* (1) *á partir de este valor viene disminuída en una permanencia y aumentada en una variación; si por el contrario el valor de* x *que anula á* $f(x)$ *fuese negativo, el número de variaciones de* (1) *disminuye en una unidad mientras que el de permanencias aumenta en otra.* (Corral.)

Este principio es la 4.ª propiedad de la serie de funciones (1) enunciada en otra forma y cuya demostración es la siguiente:

Sea a el valor positivo de x que anula á $f(x)$; y h una cantidad lo suficientemente pequeña para que $(a - h)$ y $(a + h)$ no comprendan raíz alguna de $E_1 f(x) = 0$, razón por la cual $E_1 f(a - h)$, $E_1 f(a)$, $E_1 f(a + h)$ serán las tres del mismo signo. Teniendo en cuenta que para $x = a$

$$f(a) = 0 \qquad E_1 f(a) = -a \cdot f'(a)$$

deduciremos aplicando el desarrollo de Taylor

$$f(a + h) = -\frac{h}{a} \cdot E_1 f(a) + \frac{h^2}{1.2} \cdot f''(a) + \frac{h^3}{1.2.3} \cdot f'''(a) + \ldots \quad (3)$$

$$f(a - h) = +\frac{h}{a} \cdot E_1 f(a) + \frac{h^2}{1.2} \cdot f''(a) - \frac{h^3}{1.2.3} \cdot f'''(a) + \ldots \quad (4)$$

Siendo la raíz a positiva, el signo de $f(a + h)$ será contrario al de $E_1 f(a)$ ó de $E_1 f(a + h)$, puesto que al ser h muy pequeño el signo del segundo miembro de (3) es el mismo que el de su primer término $-\frac{h}{a} \cdot E_1 f(a)$. De igual manera deduciremos que para $a > 0$ las funciones $f(a - h)$ y $E_1 f(a - h)$ son del mismo signo.

Si a fuese negativo, análogos razonamientos nos conducirán á la conclusión de que $f(a + h)$ y $E_1 f(a + h)$ tienen igual signo, mientras que $f(a - h)$ y $E_1 f(a - h)$ son de signos contrarios.

Así pues, para $a > 0$ tendremos el siguiente cuadro de signos

	$f(x)$		$E_1 f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	.....	$\pm$
$x = a$	0	.....	$\pm$
$x = a + h$	$\mp$	.....	$\pm$

en donde se comprueba que al pasar x de $(a - h)$ hacia $(a + h)$ se gana una variación y se pierde una permanencia.

Si por el contrario, $a < 0$

	$f(x)$		$E_1 f(x)$
$x = a - h$	$\pm$	.....	$\mp$
$x = a$	0	.....	$\mp$
$x = a + h$	$\mp$	.....	$\mp$

y entonces toda variación se transforma en permanencia.

Conocidas las cualidades precedentes de la serie (1), fácil es ahora demostrar el teorema. Llamemos por p el número de raíces positivas de $f(x) = 0$ comprendidas entre α y $\beta > \alpha$, así como n será el número de las raíces negativas incluídas en dicho mismo intervalo. Designando por v_α el número de variaciones que la serie (1) presenta cuando se hace $x = \alpha$, y por v_β el de variaciones de la misma para $x = \beta$, tendremos que al variar x de α á β pasará por todas las raíces n y por todas las p del intervalo dado. Según el segundo principio, cada vez que x pasa por una raíz positiva el número v_α aumenta una unidad, luego en las p raíces mayores que cero habrá aumentado p unidades; de modo distinto ocurre cuando se pasa por una raíz negativa, pues entonces v_α disminuye en una unidad, de manera que decrecerá en conjunto n unidades; tendremos, pues,

$$v_\alpha + p - n = v_\beta$$

ya que la única causa que altera el número de variaciones de (1), es cuando x toma un valor que anula á $f(x)$.

Veamos el modo de hacer aplicación del teorema cuando en la ecuación dada existen raíces múltiples; es decir, que $f(x)$ y $E_1 f(x)$ se anulan para un mismo valor de la variable. Sea la ecuación dada

$$f(x) = (x - x_1)^n \cdot (x - x_2)^p \cdot (x - x_3)^q \cdot \ldots\ldots (x - x_m)$$

por lo que

$$E_1 f(x) = -n \cdot x_1 \cdot \frac{f(x)}{x - x_1} - p \cdot x_2 \cdot \frac{f(x)}{x - x_2} - q \cdot x_3 \cdot \frac{f(x)}{x - x_3} - \ldots\ldots - x_m \cdot \frac{f(x)}{x - x_m}$$

El máximo común divisor de $f(x)$ y $E_1 f(x)$ es en este caso, según sabemos

$$X_{r-1} = (x - x_1)^{n-1} \cdot (x - x_2)^{p-1} \cdot (x - x_3)^{q-1} \cdot \ldots\ldots (x - x_{m-1})$$

ya que entonces

$$X_r = 0$$

Dividiendo á $f(x)$ por X_{r-1} y llamando $f_1(x)$ al cociente, será

$$f_1(x) = \frac{f(x)}{X_{r-1}} = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \ldots\ldots (x - x_{m-1}) \cdot (x - x_m)$$

haciendo lo mismo con $E_1\, f(x)$ tendremos

$$(5) \qquad \frac{E_1\, f(x)}{X_{r-1}} = \varphi_1(x) = -n \cdot x_1 \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_1} - p \cdot x_2 \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_2} - \ldots\ldots - x_m \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_m}.$$

Las funciones $f_1(x)$ y $\varphi_1(x)$ son primas entre sí; los residuos que dejan al realizar las operaciones del máximo común divisor serán los mismos que dan $f(x)$ y $E_1 f(x)$ divididos por X_{r-1}.

Así tendremos

$$X_1' = \frac{X_1}{X_{r-1}} \qquad X_2' = \frac{X_2}{X_{r-1}} \ldots\ldots X'_{r-1} = \frac{X_{r-1}}{X_{r-1}} = +1$$

Haciendo

$$p \cdot x_2 \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_2} + q \cdot x_3 \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_3} + \ldots\ldots + x_m \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_m} = Q$$

la igualdad (5) se convierte en

$$\varphi_1(x) = -n \cdot x_1 \cdot \frac{f_1(x)}{x - x_1} - Q = \frac{-n \cdot x_1 \cdot f_1(x) - Q \cdot (x - x_1)}{x - x_1}$$

Dividiendo ambos miembros por $f_1(x)$ y llamando

$$\frac{Q}{f_1(x)} = Q_1 = \frac{p\, x_2}{x - x_2} + \frac{q \cdot x_3}{x - x_3} + \ldots\ldots + \frac{x_m}{x - x_m}$$

tendremos

$$(6) \qquad \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{E_1\, f(x)}{X_{r-1} \cdot f_1(x)} = \frac{-n \cdot x_1 - Q_1 \cdot (x - x_1)}{x - x_1}$$

Distingamos ahora los dos casos de siempre:

1.º *Que x_1 sea positiva.*

Dando en la fórmula (6) á x el valor $x_1 - h$, siendo h tan próximo á cero como queramos, el signo del numerador de la fracción del segundo miembro dependerá de $-n\, x_1$; el mismo resultado obtendríamos si $x = x_1 + h$.

Ahora bien, en el supuesto de ser $x = x_1 - h$ el denominador de dicha fracción es negativo, y como el numerador también lo es, deducimos que el cociente $\frac{\varphi_1(x_1 - h)}{f_1(x_1 - h)}$ será positivo, y por tanto $\varphi_1(x_1 - h)$ y $f_1(x_1 - h)$ tienen el mismo signo.

Para $x = x_1 + h$ el numerador de la fracción del segundo miembro de (6) sigue siendo negativo, mientras que su denominador es positivo, luego entonces $\varphi_1(x_1 + h)$ y $f_1(x_1 + h)$ serán de signos contrarios.

Vemos por tanto que cuando la raíz de $f_1(x) = 0$ es positiva, la permanencia que presentan $\varphi_1(x)$ y $f_1(x)$ antes de dar á x dicho valor x_1, se transforma en variación.

2.º *Que la raíz x_1 sea negativa.* Un razonamiento análogo al anterior nos hará concluir que las variaciones que presentan $\varphi_1(x)$ y $f_1(x)$ cuando x es inferior á una raíz negativa de $f_1(x)$ se transforman en permanencias al pasar x por valores superiores á dicha raíz.

Dividiendo ambos miembros de la igualdad

$$X_{n-1} = Q_n \cdot X_n - X_{n+1}$$

por X_{r-1}, tendremos la relación general

$$X'_{n-1} = Q_n \cdot X'_n - X'_{n+1}$$

que une entre sí á las nuevas funciones X' y la cual nos prueba que los valores de x, raíces de algunas de ellas, no hacen desaparecer el número de variaciones de la serie

(7) $$f_1(x) \cdot \varphi_1(x),\ X'_1,\ X'_2 \ldots\ldots X'_{r-1} = 1$$

ya consideremos una raíz positiva ó negativa.

Como $f_1(x)$ tiene todas sus raíces diferentes y cumple las condiciones generales del teorema cuando forma parte de la serie (7), tendremos que creciendo x de α á β el número de raíces negativas de $f_1(x)$ más que positivas existentes entre ambas cantidades, es igual al número de variaciones de menos que dicha serie (7) presenta cuando se hace $x = \beta$ y se las compara con las correspondientes á $x = \alpha$.

Si para un cierto valor de x la función X_{r-1} toma signo positivo, las dos series

(1) $f(x) \quad E_1 f(x) \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \ldots\ldots X_{r-1}$

(7) $f_1(x) \quad \varphi_1(x) \quad X'_1 \quad X'_2 \quad X'_3 \ldots\ldots X_{r-1} = 1$

tendrán sus términos correspondientes de un mismo signo. Caso de que por el contrario X_{r-1} se hiciese negativo, los términos de ambas series serían dos á dos de signos contrarios.

En ambos supuestos, resultará siempre que las dos series (1) y (7)

presentan un mismo número de variaciones cualquiera que sea el valor de x; mas como las variaciones de (7) son las que determinan el exceso del número de raíces negativas sobre el de positivas de la ecuación $f_1(x) = 0$ — la cual tiene idénticas raíces diferentes que $f(x) = 0$ — comprendidas entre α y β, demostrado queda que el teorema actual se aplica sin modificación á las ecuaciones de raíces múltiples, siempre que se haga abstracción del grado de multiplicidad de estas raíces.

Nuestra serie de funciones

$$f(x) \qquad E_1 f(x) \qquad X_1 \qquad X_2 \ldots\ldots X_r$$

es esencialmente distinta de la serie de Sturm

$$f(x) \quad f'(x) \quad Y_1 \quad Y_2 \ldots\ldots Y_{r'}$$

pues todos sus términos, excepto el primero, son respectivamente diferentes de los de ésta. Ambas series resuelven, sin embargo, el mismo problema.

Cuando la ecuación carece de segundo término, es decir, que $a_1 = 0$, es más conveniente usar nuestro teorema que el de Sturm, pues nuestra serie tiene entonces un término menos que la serie de Sturm.

Ejemplo I.—Sea la ecuación

$$f(x) = x^4 - x^3 + 2 \cdot x^2 - 6x + 5 = 0$$

cuyas raíces deseamos determinar en cuanto á su naturaleza. Tendremos

$$E_1 f(x) = -x^3 + 4x^2 - 18x + 20$$

por lo cual, procediendo de conformidad con el enunciado de nuestro teorema se encontrará

$$X_1 = 4x^2 + 40 \cdot x - 65$$
$$X_2 = 697x - 918$$
$$X_3 = + 2612849$$

Podemos establecer el siguiente cuadro

	$f(x)$	$E_1 f(x)$	X_1	X_2	X_3
$x = -\infty$	+	+	+	−	+
$x = 0$	+	+	−	+	+
$x = +\infty$	+	−	+	+	+

que presenta el mismo número de variaciones para los tres valores $-\infty$, 0, $+\infty$; lo cual prueba que la ecuación dada no tiene raíces reales y que sus cuatro raíces son todas imaginarias.

Ejemplo II.—Supongamos que se quiera determinar la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^6 + 3\,x^4 - 4\,x^3 + 6\,x^2 + 12\,x - 18 = 0$$

Prosiguiendo la marcha indicada encontraremos los siguientes términos restantes de nuestra serie

$$\frac{1}{6}\,.\,E_1\,f(x) = x^4 - 2\,x^3 + 4\,x^2 + 10\,.\,x - 18$$

$$\frac{1}{2}\,.\,X_1 = 8\,x^3 + 4\,x^2 - 9\,x - 18$$

$$\frac{1}{4}\,.\,X_2 = -\,62\,x^2 - 241\,x + 198$$

$$\frac{1}{3}\,.\,X_3 = -\,39041\,.\,x + 33486$$

$$X_4 = +\,81624378480$$

De aquí el siguiente resultado

	$f(x)$	$E_1 f(x)$	X_1	X_2	X_3	X_4
$x = -\infty$	+	+	—	—	—	+
$x = 0$	—	—	—	+	+	+
$x = +\infty$	+	+	+	—	—	+

que demuestra la existencia de una raíz real negativa y otra real positiva; la ecuación tiene, pues, además cuatro raíces imaginarias.

Ejemplo III.—Investiguemos ahora la naturaleza de las raíces de la ecuación

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$$

Procediendo como antes, se obtendrá

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^4 + x^3 - 4\,x^2 - 4\,x + 1$	+	+	+
$E_1\,f(x) = x^3 - 8\,x^2 - 12\,x + 4$	—	+	+
$X_1 = -\,80\,x^2 - 100\,x + 35$	—	+	—
$X_2 = +\,15$	+	+	+

de donde deducimos que las cuatro raíces de la ecuación son reales, siendo dos de ellas positivas y las otras dos negativas.

EJEMPLO IV. — Dada la ecuación

$$f(x) = x^5 - 5x + 1 = 0$$

encontremos la naturaleza de sus raíces.

Se tendrá en este caso

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^5 - 5x + 1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{1}{5} \cdot E_1 f(x) = -4x + 1$	$+$	$+$	$-$
$X_1 = +255$	$+$	$+$	$+$

cuyo cuadro de signos prueba la existencia de una raíz real negativa y dos raíces reales positivas; las dos raíces restantes de la ecuación son, por lo tanto, imaginarias.

Los cuatro ejemplos precedentes están tomados de las obras de Comberousse y Petersen con el fin de que el lector pueda comprobar en cada caso la diferencia radical que existe entre nuestras series y las series de Sturm, no sólo por el número de sus términos, si que también por las funciones que las componen respectivamente. No podría ocurrir otra cosa ya que se trata de dos teoremas absolutamente distintos, si bien correlativos.

§ 22.—Condiciones para que las raíces de una ecuación sean reales.

El número total de raíces reales de una ecuación $f(x) = 0$ se encontrará calculando, de conformidad con el teorema anterior, la serie de funciones

$$(1) \qquad f(x), \qquad E_1 f(x), \qquad X_1, \qquad X_2 \ldots\ldots X_r$$

en la cual se sustituirán sucesivamente los números L_n, 0, L_p que son respectivamente los dos extremos límites, inferior y superior, de las raíces negativas y positivas de la ecuación dada.

Como el signo de una función es el mismo que el de su primer término cuando el módulo de la variable crece suficientemente, podremos para mayor facilidad reemplazar á L_n por $-\infty$ y á L_p por $+\infty$. Sean entonces.

$$v_{-\infty} \qquad v_0 \qquad v_{+\infty}$$

las variaciones de la serie (1) cuando á la variable x se le dan los valores $-\infty$, 0 y $+\infty$. Llamando por

$N =$ número total de raíces negativas de $f(x) = 0$
$P =$ » » » positivas de $f(x) = 0$
$N + P = R =$ » » » reales de $f(x) = 0$

tendremos según se sabe

$$\left.\begin{aligned} v_{-\infty} - v_0 &= N \\ v_{\infty} - v_0 &= P \\ v_{-\infty} + v_{\infty} - 2\,v_0 &= R \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Supongamos que la ecuación $f(x) = 0$, de grado m, tenga término de grado $(m - 1)$, por lo que $E_1\, f(x)$ será entonces de grado efectivo $(m - 1)$; esto ocurrirá desde luego en las *funciones completas* de x.

Teorema I. — *Para que una ecuación completa de grado m tenga sus m raíces desiguales y negativas, es necesario y suficiente que la serie (1) de funciones formadas del modo precitado, se componga de (m + 1) funciones cuyos términos independientes sean todos del mismo signo, y cuyos primeros términos tengan coeficientes positivos.* (Corral.)

Este enunciado de ser las raíces desiguales y negativas todas, envuelve la condición

$$(3) \qquad v_{-\infty} - v_0 = N = m$$

de modo que la serie (1) ha de perder m variaciones cuando x pase de $-\infty$ á 0; requisito que lleva consigo la necesidad de tener la serie (1), $(m + 1)$ términos, ya que es imposible pueda contener más.

El número r será igual á $(m - 1)$ y las diversas funciones tendrán respectivamente los grados siguientes.

$$m, \quad m - 1, \quad m - 2, \quad m - 3, \ldots\ldots 1, 0$$

Como $v_0 \overline{\overline{>}}\ 0$ y $v_{-\infty} \overline{\overline{<}}\ m$, la igualdad (3) sólo puede ser cierta cuando simultáneamente

$$v_{-\infty} = m \qquad\qquad v_0 = 0$$

lo que se verifica si los términos independientes tienen el mismo signo $(v_0 = 0)$, y si los primeros términos poseen coeficientes positivos $(v_{-\infty} = m)$.

Se afirma que $v_{-\infty}$ sólo puede valer m cuando todos los primeros términos de la serie (1) tienen coeficientes *positivos*, por el supuesto implícito de que el coeficiente de x^m en $f(x)$ es siempre una

cantidad positiva; ya que es clásico cambiar de signos á los términos de la ecuación dada para que tal circunstancia se verifique siempre.

Teorema II.—*Para que una ecuación completa de grado m tenga sus m raíces desiguales y positivas, es necesario y suficiente que la serie* (1) *se componga de* $(m+1)$ *funciones, cuyos términos independientes sean todos del mismo signo y cuyos primeros términos tengan coeficientes alternadamente positivos y negativos.* (Corral.)

Tiene que ser entonces

$$v_{+\infty} - v_0 = P = m$$

y como

$$v_0 \geqq 0 \, , \, v_{+\infty} \leqq m,$$

deberemos tener necesariamente

$$v_{+\infty} = m \qquad\qquad v_0 = 0$$

para lo cual será preciso que los primeros términos sean de coeficientes alternadamente positivos y negativos $(v_{\infty} = m)$, mientras que los términos independientes tengan todos el mismo signo

$$(v_0 = 0)$$

Teorema III. — *Para que una ecuación de grado m tenga sus m raíces reales y desiguales, es condición suficiente una de las dos cosas:*

1.ª *Que la serie* (1) *se componga de* $(m+1)$ *funciones, y que en cada una de ellas el término independiente se mantenga con un mismo signo, ó bien;* 2.ª *que teniendo todas las funciones* (1) *el término independiente de signo constante, se realice además la condición* $v_{+\infty} + v_{-\infty} = m$. (Corral.)

La condición necesaria y suficiente es, efectivamente, que se verifique la igualdad

$$\textbf{(4)} \qquad v_{-\infty} + v_{+\infty} - 2 \cdot v_0 = R = m$$

lo cual puede conseguirse de estos dos modos:

1.º Si la serie (1) tiene $(m+1)$ términos cuyos grados respectivos decrecen sucesivamente de m á 0, es evidente entonces que

$$v_{-\infty} + v_{+\infty} = m$$

luego deberemos tener

$$v_0 = 0$$

es decir, que los términos independientes de las funciones (1) han de ser del mismo signo.

2.º Si la serie (1) tuviese menos de $(m + 1)$ términos, por anularse idénticamente alguno de ellos ó por ser $E_1\,f(x)$ de grado efectivo inferior á $(m - 1)$, la igualdad (4) quedará también satisfecha si

$$v_0 = 0 \qquad v_{-\infty} + v_{+\infty} = m$$

lo que implica tenga lugar la condición 2.ª del enunciado.

Ejemplo.—Hagamos aplicación del teorema III á la ecuación de tercer grado.

$$x^3 + p\,.\,x + q = 0$$

buscando las condiciones de realidad de todas sus raíces.

Como

$$E_1\,f(x) = 2\,p\,x + q$$

es de primer grado, la serie (1) de funciones tendrá menos de $m + 1 = 4$ términos, por lo que habremos de fijarnos en la condición 2.ª ya que la primera es inaplicable.

Realizando operaciones obtendremos

$$f(x) = x^3 + p\,x + q$$

ó bien

$$f(x) = 4\,x^3 + 4\,p\,.\,x + 4\,q$$
$$E_1\,f(x) = 2\,p\,x + 3\,q$$
$$X_1 = + \frac{q}{2\,.\,p^3}\,.\,(4\,p^3 + 27\,.\,q^2)$$

después de cambiar á X_1 el signo verdaderamente encontrado.

Para que todos los términos independientes de estas tres funciones sean del mismo signo, será preciso que X_1 sea del mismo signo que q; es decir, que deberemos satisfacer la desigualdad

$$\frac{4\,p^3 + 27\,.\,q^2}{2\,p^3} > 0 \qquad (5)$$

Como al propio tiempo habremos de tener $v_{+\infty} + v_{-\infty} = 3$, será necesario que $p < 0$, pues entonces

	$x = +\infty$		$x = -\infty$
$f(x)$	$+$	.....	$-$
$E_1 f(x)$	$-$	.....	$+$
X_1	$\pm$	.....	$\pm$

en cualquiera de los dos casos $X_1 \gtrless 0$ siempre

$$v_{+\infty} + v_{-\infty} = 3$$

Si fuese $p > 0$, entonces

	$x = +\infty$		$x = -\infty$
$f(x)$	$+$	.....	$-$
$E_1 f(x)$	$+$	.....	$-$
X_1	$\pm$	.....	$\pm$

y en ninguno de los dos casos $X_1 \gtrless 0$ podríamos tener

$$v_{+\infty} + v_{-\infty} = 3.$$

La condición $p < 0$ transforma á la (5) en

(6) $$4\,p^3 + 27\,q^2 < 0$$

que resume las dos anteriores, pues para que ella se verifique se necesita que $p < 0$.

Así pues, la condición de realidad de las tres raíces de la ecuación dada, es que sus coeficientes satisfagan la desigualdad (6).

§ 23.—**Extensión de nuestro método.**

Las funciones (1) que considerábamos en el teorema I del § 21 pueden ser sustituídas por las siguientes

(I) $$W, \qquad W_1 \qquad W_2 \ldots\ldots W_\mu$$

siempre que estas nuevas cumplan con las condiciones:

1.ª *Que la última función W_μ no cambie de signo cuando su variable x oscile entre los dos límites dados α y $\beta > \alpha$.* (Sturm.)

2.ª *Que dos funciones consecutivas de la serie no se anulen para un mismo valor de x comprendido entre α y β.* (Sturm.)

3.ª *Que al anularse una función cualquiera distinta á la primera las otras dos que la comprenden tomen, para dicho valor de x comprendido entre α y β, valores iguales y de signos contrarios.* (Sturm.)

4.ª *Que cuando x crece de α á β la relación $\frac{W}{W_1}$ pase de positiva á*

negativa cada vez que se anule para un valor positivo de x, y de negativa á positiva cuando x sea negativo. (Corral.)

Estas condiciones son efectivamente las únicas que hemos hecho intervenir en la demostración del teorema I (§ 21).

Sustituyendo en esta nueva serie (1') de funciones de una sola variable x, los valores particulares $x = \alpha$ y después $x = \beta$, la diferencia de variaciones $v_\alpha - v_\beta$ así obtenida será igual al exceso $(n - p)$ de las raíces negativas sobre las positivas de la ecuación $W = 0$ que se encuentran comprendidas entre α y β.

Si la última condición 4.ª la reemplazamos por su contraria,

5.ª *Que cuando x crece de α á β la relación $\frac{W}{W_1}$ pase de negativa á positiva cada vez que se anule para un valor positivo de x y de positiva á negativa cuando x sea negativo.* (Corral.)

Como las tres primeras condiciones son las mismas que antes, es fácil deducir entonces que la diferencia de variaciones $v_\alpha - v_\beta$ es igual al exceso $(p - n)$ de las raíces positivas sobre las negativas.

Así, cuando rige la condición 4.ª, se tiene

$$(a) \qquad v_\alpha - v_\beta = n - p$$

mientras que cuando es la 5.ª la vigente, entonces

$$(b) \qquad v_\alpha - v_\beta = p - n$$

Llamando ∇ la diferencia que existe entre el número de veces que la relación $\frac{W}{W_1}$ anulándose pasa de positiva á negativa sobre la totalidad de ocasiones en que pasando por cero se transforma de negativa á positiva; y por k la diferencia $v_\alpha - v_\beta$, tendremos que si W y W_1 cumplen la condición 4.ª ó la 5.ª, siempre será cierta la igualdad

$$\nabla = - k$$

según es fácil de comprobar, teniendo presente las relaciones (a) y (b).

Indiquemos por ∇' el exceso del número de veces que $\frac{W_1}{W}$ anulándose para cierto valor de la variable pase de positivo á negativo sobre la totalidad de veces que reduciéndose á cero se convierta de negativo á positivo: por ∇'' la cantidad análoga para $\frac{W_1}{W_2}$. Observan-

do que ambos cocientes $\frac{W_1}{W}$ y $\frac{W_1}{W_2}$ se anulan para el mismo valor de x y que entonces W y W_2 son iguales y de signos contrarios, deduciremos que cuando $\frac{W_1}{W}$ pasa de positiva á negativa, la fracción $\frac{W_1}{W_2}$ pasará de negativa á positiva, é inversamente; resultará por tanto

$$-\nabla'' = \nabla'$$

Para calcular el valor de ∇'' formaremos como antes la serie

$$(2) \qquad W_1, \; W_2, \; W_3 \; \ldots\ldots \; W_\mu$$

en la que sustituiremos x por α obteniéndose $v^1{}_\alpha$ variaciones; haciendo luego $x = \beta$ deduciremos $v^1{}_\beta$, de modo que

$$\nabla'' = -k^1 = -(v^1{}_\alpha - v^1{}_\beta)$$

luego

$$\nabla' = k^1 = v^1{}_\alpha - v^1{}_\beta \quad \text{y} \quad -\nabla' = -k^1$$

Comparemos ahora los números k y k^1. La serie (2) se deduce de la (1) suprimiendo en ésta su primer término W; si resultase que para $x = \alpha$ y para $x = \beta$, el cociente $\frac{W}{W_1}$ tuviese el mismo signo, evidentemente entonces $k = k^1$, luego también

$$\nabla = -\nabla'$$

Supongamos que para $x = \alpha$ la fracción $\frac{W}{W_1}$ tiene el signo $+$, mientras que para $x = \beta$ sea negativa; entonces

	W	W_1	W_2 ...		W_1	W_2	
$x = \alpha$	$\pm$	$\pm$	....	v_α	$\pm$	....	v_α^1
$x = \beta$	$\pm$	$\mp$	....	v_β	$\mp$	....	v_β^1

y como tenemos

$$k = v_\alpha - v_\beta \qquad\qquad k^1 = v_\alpha - v_\beta^1$$

deduciremos, en vista de las relaciones

$$v_\alpha^{\,1} = v_\alpha \qquad\qquad v_\beta^{\,1} = v_\beta - 1$$

que

$$k^1 = k + 1$$

ó sea

$$\nabla' = -\nabla + 1$$

Si para $x = \alpha$ la relación $\frac{W}{W_1}$ tiene el signo —, y para $x = \beta$ el signo +, entonces

$$\begin{array}{lccccc} & W & W_1 & W_2 \ldots\ldots & & W_1 \;\; W_2 \;\; W_3 \ldots\ldots \\ x = \alpha \ldots\ldots & \pm & \mp \ldots\ldots\ldots\ldots & v_\alpha & \mp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v_\alpha^{\,1} \\ x = \beta \ldots\ldots & \pm & \pm \ldots\ldots\ldots\ldots & v_\beta & \pm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & v_\beta^{\,1} \end{array}$$

luego

$$v_\alpha^{\,1} = v_\alpha - 1 \qquad\qquad v_\beta^{\,1} = v_\beta$$

por lo cual

$$k^1 = v_\alpha^{\,1} - v_\beta^{\,1} = v_\alpha - v_\beta - 1 = k - 1$$

ó sea también

$$\nabla' = -\nabla - 1$$

Tendremos, pues, en resumen:

1.° $\nabla' = -\nabla$ cuando $\frac{W}{W_1}$ toma el mismo signo para $x = \alpha$ y $x = \beta$.

2.° $\nabla' = -\nabla + 1$ cuando para

$$x = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{W}{W_1} > 0$$

$$x = \beta \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{W}{W_1} < 0$$

3.° $\nabla' = -\nabla - 1$ en el caso de que para

$$x = \alpha \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{W}{W_1} < 0$$

$$x = \beta \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{W}{W_1} > 0$$

Caso particular $k = m$.

Siendo W una función de grado m, cuando se tenga $k = m$ resultará que *todas las raíces de W son reales y del mismo signo;* además, creciendo entonces x de α á β como estos dos números son positivos ó negativos, el cociente $\frac{W}{W_1}$ cada vez que se anule pasará de positivo á negativo ó siempre de negativo á positivo. Llamando x_1 y x_2 dos valores de x entre α y β que anulan á $\frac{W}{W_1}$, tendremos

$$x = x_1 - h \ldots\ldots \frac{W}{W_1} \text{ tiene signo } + \text{ ó bien } -$$

$$x = x_2 - h \ldots\ldots \frac{W}{W_1} \text{ tiene signo } + \text{ ó bien } -$$

$$x = x_1 + h \ldots\ldots \frac{W}{W_1} \text{ tiene signo } - \text{ ó bien } +$$

$$x = x_2 + h \ldots\ldots \frac{W}{W_1} \text{ tiene signo } - \text{ ó bien } +$$

Como x_1 y x_2 son dos raíces consecutivas de W, es evidente que entre $x_1 + h$ y $x_2 - h$ la función W tendrá un signo constante; pero en este intervalo el cociente $\frac{W}{W_1}$ cambia de signo, luego es que la función W_1 pasa por cero en dicho intervalo. Vemos por tanto que dos raíces consecutivas de $W = 0$ comprenderán necesariamente una raíz de $W_1 = 0$; de modo que si W_1 es de grado $(m - 1)$, todas sus raíces serán reales y del mismo signo, además de que *separarán entonces todas las raíces de $W = 0$.*

§ 24.—Aplicación del método á la investigación del número de raíces complejas de una función real, comprendidas en un contorno.

Supongamos que

$$f(z) = M + i \cdot y \,.\, N$$

sea una función entera y real de la variable imaginaria $z = x + i \,.\, y$. Cuando se trata de saber el número de raíces complejas de $f(z) = 0$ con parte imaginaria positiva, que en el interior de un contorno dado existen en exceso á las que tienen coeficiente imaginario negativo, bastará aplicar nuestro teorema del § 1, que da, designando por ∇ dicha diferencia

$$\nabla = 2\,(\mu_2 - \mu_1)$$

Según entonces comprobamos, el número ∇ es la diferencia entre las veces que la fracción $\frac{M}{N}$ anulándose pasa de positiva á negativa sobre la totalidad de ocasiones que al reducirse á cero se transforma de negativa á positiva; por otra parte $\frac{M}{N}$ al anularse pasa de positiva á negativa si $y_0 > 0$ y de negativa á positiva si $y_0 < 0$.

Si $\frac{M}{N}$ no fuese más que función de una sola variable t, dicho cociente cumpliría la condición 4.ª del § 23; pero como depende de las dos variables x é y, se evitará tal inconveniente haciendo

$$x = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \qquad\qquad y = \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}$$

en donde φ. ψ, Φ, Ψ son funciones reales y enteras de la variable t.

El exceso ∇ tomado sobre todo el contorno es evidentemente igual á la suma de los excesos parciales relativos á las diversas porciones $A\,B$ en que puede dividirse el contorno dado. Para el punto A la variable t valdrá t_0 mientras que para el B será T.

Reemplazando en la fracción $\frac{M}{N}$ las variables x é y por sus expresiones en función de t, llegaremos á la igualdad

$$\frac{M}{N} = \frac{W\,(t)}{W_1\,(t)}$$

en donde $W(t)$ y $W_1\,(t)$ son funciones reales de t sin divisor común. Entonces la fracción $\frac{M}{N}$ cumple la condición 4.ª á pesar de que cuando $\frac{W}{W_1}$ pasa de negativo á positivo é inversamente no sabemos cuál es el signo de t, pero nos basta saber que los cambios para $\frac{M}{N}$ son los mismos que para $\frac{W}{W_1}$, así como también que $\frac{M}{N}$ satisface por completo la hipótesis con relación á y, circunstancia que es para nosotros la interesante.

Se podrá, pues, enunciar la regla siguiente:

I. *Cuando el grado de W no es inferior al de W_1 se realizarán con ambas funciones el procedimiento clásico de encontrar un máximo*

común divisor, si bien los residuos encontrados serán cambiados de signo antes de pasar á ser divisores. Llegaremos de este modo á un resto $-W_\mu$ *que sea independiente de t, así es que tendremos la serie de funciones*

$$W \qquad W_1 \qquad W_2 \ldots\ldots W_\mu$$

Contando las variaciones que presenta para $t = t_0$ *así como las que tiene cuando* $t = T$, *podremos encontrar el exceso* ∇ *de las raíces complejas con parte imaginaria positiva sobre las que tienen coeficiente imaginario negativo, pero ambas comprendidas en el contorno dado, tomando la diferencia entre este segundo número de variaciones* (T) *y el primero* (t_0).

Si el grado de W *es inferior al grado de* W_1, *se realizarán idénticas operaciones, si bien tomando como dividendo á* W_1 *y á* W *como divisor. Obtendremos así una serie análoga*

$$W_1 \qquad W \qquad W_2 \qquad W_3 \ldots\ldots W_\mu$$

cuyo último término W_μ *es independiente de* t, *y en la cual haremos las dos sustituciones sucesivas* $t = t_0$ *y* $t = T$ *para calcular el número de sus variaciones respectivas. Llamando por* k *el exceso del segundo número de variaciones sobre el primero, podrán ocurrir los subcasos siguientes:*

1.º $\nabla = -k$ *cuando* W_1, W *presenten una variación ó una permanencia para* $t = t_0$ *así como para* $t = T$.

2.º $\nabla = -k + 1$ *en el supuesto de que las funciones* W_1, W *ofrecen una permanencia para* $t = t_0$ *y una variación al ser* $t = T$.

3.º $\nabla = k - 1$ *cuando los términos* W_1, W *tienen una variación para* $t = t_0$ *y una permanencia para* $t = T$.

El número ∇ *tiene en este segundo caso la misma significación que en el primero.* (Sturm.)

Cuando el contorno considerado sea un círculo de radio R cuyo centro tiene por coordenadas cartesianas x_0, y_0 se podrá escribir

$$x = x_0 + R \cdot \cos \omega \qquad\qquad y = y_0 + R \cdot \operatorname{sen} \omega$$

en donde ω es el ángulo formado por un radio cualquiera con el eje de las x, y puede tomar todos los valores comprendidos entre 0 y 360º

Llamando

$$t = \operatorname{tag} \frac{\omega}{2}$$

es fácil deducir que

$$\cos \omega = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad \operatorname{sen} \omega = \frac{2 \,.\, t}{1 + t^2}$$

luego

$$x = x_0 + R \,.\, \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad y = y_0 + R \,.\, \frac{2\, t}{1 + t^2}$$

donde la variable t puede crecer desde $-\infty$ hasta $+\infty$.

Consideremos ahora el caso sencillísimo de que el contorno dado

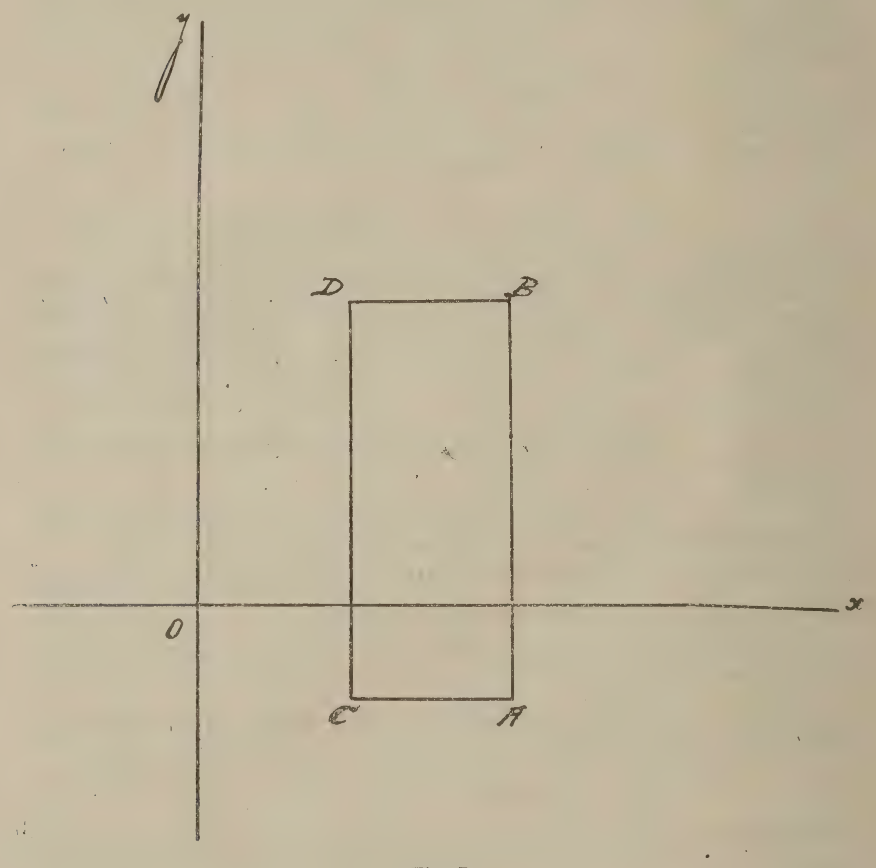


Fig. 7.ª.

sea un rectángulo cuyos lados son paralelos á los ejes cartesianos (Fig. 7.ª). El exceso total será la suma de los correspondientes á cada

uno de los cuatro lados AB, BD, DC y CA, cuyas ecuaciones respectivas son

$$(AB)\ x = X \qquad (BD)\ y = Y$$
$$(DC)\ x = x_0 \qquad (CA)\ y = y_0$$

La ecuación dada será

$$f(z) = a_0 (x + i \cdot y)^m + a_1 \ (x + i \cdot y)^{m-1} + \dots\dots$$

con un coeficiente del primer término que puede reducirse á la unidad, si bien en el caso actual lo suponemos $a_0 \neq 0$.

Ordenada la función M con relación á las potencias decrecientes de y, su primer término valdrá

$\pm a_0 y^m$ cuando m es número par,

$y^{m-1} (\pm m \cdot a_0 \cdot x \pm a_1)$ cuando m es impar.

Dando á y un valor determinado de módulo suficientemente grande, la función M no se anulará para ningún valor de x comprendido entre x_0 y X; y al no pasar por cero la fracción $\frac{M}{N}$ á lo largo de las rectas BD y CA, dicho queda es nulo el exceso parcial relativo á cada uno de estos lados.

El exceso correspondiente á AB se encontrará sustituyendo x por X en la fracción $\frac{M(x\ y)}{N(x\ y)}$, que se convierte entonces en

$$\frac{M\ (X\ y)}{N\ (X\ y)}$$

Haciendo variar á y de $-\infty$ á $+\infty$, se podrá calcular la diferencia K entre el número de veces que dicha relación anulándose pasa de positiva á negativa y la totalidad de ocasiones que la misma fracción se reduce á cero al transformarse de negativa á positiva.

De igual modo se hallará el exceso parcial relativo al lado DC, pues bastará poner $x = x_0$, considerando el cociente

$$\frac{M\ (x_0\ y)}{N\ (x_0\ y)}$$

el cual servirá para encontrar el número K_0, que será igual y de signo contrario á K.

Así tendremos el teorema siguiente:

Sea $f(z) = \varphi(x\,y) + i\,.\,y\,.\,\theta(x\,y)$ *una función real de la variable imaginaria* $z = x + i\,.\,y$. *Designemos por* K *el exceso del número de veces que la fracción* $\frac{\varphi(X\,y)}{\theta(X\,y)}$ *se anula pasando de positiva á negativa sobre las ocasiones en que reduciéndose á cero se transforma de negativa á positiva; por* K_0 *la diferencia análoga correspondiente á*

$$\frac{\varphi(x_0\,y)}{\theta(x_0\,y)}$$

Siendo μ_2 *el número de raíces complejas con parte imaginaria positiva que se encuentran entre las dos paralelas* $x = x_0$ (DC) *y* $x = X$ (AB), *así como indicando* μ_1 *el número de raíces de* $f(z) = 0$ *con coeficientes imaginarios negativos que se hallan en el mismo espacio, tendremos* $K - K_0 = 2(\mu_2 - \mu_1) = 0$. (Corral.)

De modo idéntico puede calcularse la diferencia $2\left(\mu^1_2 - \mu^1_1\right)$ existente entre dos paralelas al eje de las x.

Aplicaciones.—Veamos el modo de aplicar los principios generales anteriores á la resolución del problema de investigar el nú-

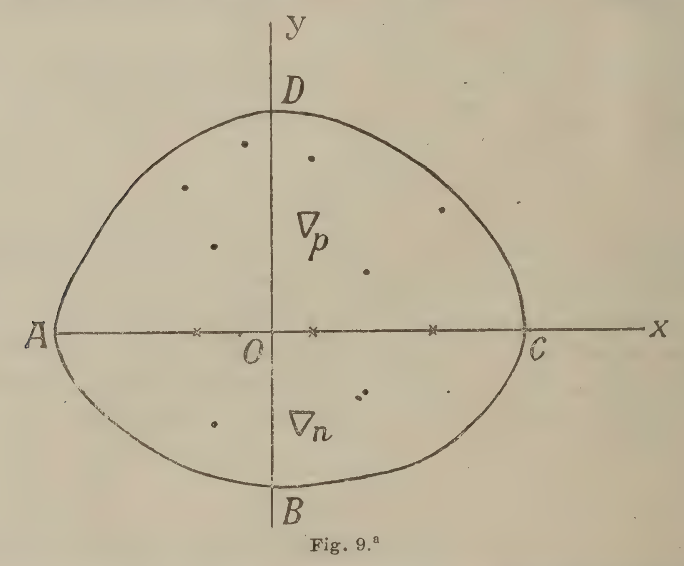


Fig. 9.ª

mero de raíces reales, imaginarias positivas é imaginarias negativas que la ecuación dada $f(z) = 0$ tiene en el interior de un contorno

cerrado. La figura 9.ª indica un caso particular que sirve para fijar las ideas. El contorno dado $A\,B\,C\,D$ es irregular y disimétrico con relación á los dos ejes $0\,x$, $0\,y$. Las incógnitas del problema son:

r = número de raíces reales comprendidas por $A\,B\,C\,D$.

i_n = número de raíces imaginarias negativas encerradas por $A\,B\,C\,D$.

i_p = número de raíces imaginarias positivas comprendidas en $A\,B\,C\,D$.

El contorno total $A\,B\,C\,D$ lo descompondremos en los dos parciales; $A\,B\,C\,A$ y $A\,C\,D\,A$. Llamaremos ∇_n el exceso del primero y ∇_p el del segundo.

El exceso ∇_n es evidentemente la suma de los dos excesos parciales ∇_{ABC} y ∇_{CA}; es decir, que

$$\nabla_n = \nabla_{ABC} + \nabla_{CA}$$

Antes de proseguir conviene observar que el exceso ∇_{ABC} puede ser sencillo ó múltiple según que la curva $A\,B\,C$ sea continua ó bien represente la unión de varias otras curvas parciales de diferente naturaleza. Para encontrar el valor de ∇_{ABC} se aplicará estrictamente la regla I de este artículo, distinguiéndose los dos casos que pueden ocurrir; que W_1 sea de grado inferior ó superior á W.

En cuanto á ∇_{CA} puede demostrarse fácilmente que

$$\nabla_{CA} = +\,r$$

Observemos, en efecto, que á lo largo de $C\,A$ se tiene $y = 0$ por lo que entonces las funciones

$$M = f(x) - \frac{y^2}{1\,.\,2}\,.\,f''(x) + \frac{y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,.\,f^{\mathrm{IV}}(x) - \ldots\ldots$$

$$N = f'(x) - \frac{y^2}{1\,.\,2\,.\,3}\,.\,f'''(x) + \frac{y^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}\,.\,f^{\mathrm{V}}(x) - \ldots\ldots$$

toman los valores particulares

$$M_1 = f(x) \qquad\qquad N_1 = f'(x)$$

de donde

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Pero, según sabemos, la relación $\frac{f(x)}{f'(x)}$ al decrecer la variable x de C hacia A *pasa siempre de positiva á negativa* cada vez que se atraviesa una cualquiera de las raíces reales de

$$f(z) = M + i \cdot y \cdot N = 0$$

que lo son también de $M_1 = f(x) = 0$. Como por definición ∇_{CA} es la diferencia que existe entre el número de veçes que la relación $\frac{M_1}{N_1}$ anulándose pasa de positiva á negativa sobre la totalidad de ocasiones (que es cero) donde en igualdad de condiciones se transforma de negativa á positiva, resultará que entonces

$$\nabla_{CA} = + r$$

Para calcular ∇_{CA} se aplicará la primera parte de la regla I, ya que en este caso M_1 es siempre de grado superior á N_1.

Como en el contorno $A\ B\ C\ A$ no existe ninguna raíz que tenga parte imaginaria positiva, resultará, según nuestro teorema del § 1, que

$$\nabla_n = - 2 \cdot i_n$$

De igual modo estableceremos que

$$\nabla_p = 2 \cdot i_p = \nabla_{AC} + \nabla_{CDA} = - r + \nabla_{CDA}$$

El problema enunciado queda, pues, resuelto por el siguiente sistema de fórmulas

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} i_n &= - \frac{1}{2} (\nabla_{CA} + \nabla_{ABC}) = - \frac{1}{2} \nabla_n \\ i_p &= + \frac{1}{2} (\nabla_{AC} + \nabla_{CDA}) = + \frac{1}{2} \nabla_p \\ r &= \nabla_{CA} \end{aligned} \right.$$

refiriéndose siempre los diferentes excesos ∇ á la fracción $\frac{M}{N}$, cuyo numerador y denominador están definidos por la relación

$$f(z) = M + i \cdot y \cdot N = 0$$

siendo $f(z) = 0$ la ecuación real dada. (Corral.)

Los contornos que se eligen siempre para llegar á *conocer* y *separar* las raíces complejas y reales de una ecuación, son círculos ó

rectángulos. Estos últimos son preferibles á los primeros por la sencillez de los cálculos. Un mismo ejemplo numérico será tratado á continuación por ambos procedimientos.

Investigación por círculos concéntricos.—Estando el centro del círculo en el origen de coordenadas se tendrá

$$x = R \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \qquad\qquad y = R \cdot \frac{2 \cdot t}{1 + t^2}$$

Recorriendo la circunferencia en el sentido indicado por las flechas (Fig. 10) á partir del punto A, se tendrá que en dicho origen

$$\omega = - \pi \qquad\qquad \frac{\omega}{2} = - \frac{\pi}{2}$$

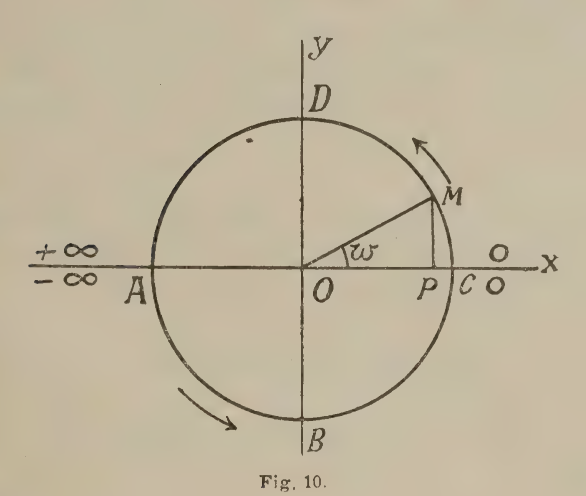


Fig. 10.

luego entonces

$$t = tag \frac{\omega}{2} = tag - \frac{\pi}{2} = - \infty$$

Cuando el punto móvil llegue á C se tendrá

$$\omega = 0 \qquad\qquad t = tag \frac{\omega}{2} = 0$$

aumentando después la variable t, hasta llegar á valer en A

$$t = tag \frac{\omega}{2} = tag \frac{\pi}{2} = + \infty$$

Si el punto móvil se le supone recorriendo la diagonal CA, los valores de x oscilarán entre

$$x = + OC \qquad \text{y} \qquad x = - OC.$$

Dando á R los valores sucesivos 1, 2, 3 . . . . . se podrá determinar con auxilio de las fórmulas (1) el número exacto de raíces reales é imaginarias que la ecuación dada tiene en el interior de cada uno de dichos círculos. Considerando un número conveniente de circunferencias, se llegará por este método á determinar y separar las raíces reales y complejas de la ecuación propuesta. Como los coeficientes de la ecuación son reales, las raíces imaginarias serán separadas por pares conjugados.

Para que el lector pueda comparar y juzgar mejor sobre la diferencia que existe entre nuestro método anterior y el que resulta de aplicar el teorema de Cauchy, vamos á considerar el mismo ejemplo numérico que trata Mr. Comberousse en las páginas 466 á 474 del tomo cuarto de su *Cours de Mathématiques* La ecuación es

$$f(z) = z^3 + 2z - 1 = 0$$

cuyas raíces se tratan de separar, averiguando al propio tiempo el número de ellas, reales é imaginarias.

Aplicando las fórmulas

$$M = f(x) - \frac{y^2}{1 \cdot 2} \cdot f''(x)$$

$$N = f'(x) - \frac{y^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot f'''(x)$$

se obtendrá

$$\left\{ \begin{aligned} M &= R^3 \cdot \frac{(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3} + 2 \cdot R \cdot \frac{1-t^2}{+t^2} - 1 - \frac{R^2}{2} \cdot \frac{4 \cdot t^2}{(1+t^2)^2} \cdot 6\, R \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ N &= 3 \cdot R^2 \cdot \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2} + 2 - R^2 \cdot \frac{4 \cdot t^2}{(1+t^2)^2} \end{aligned} \right.$$

Como lo que se ha de considerar es la fracción $\frac{M}{N}$, podemos multiplicar las dos funciones M y N por $(1 + t^2)^3$. Así procediendo encontraremos

$$\begin{cases} W = R^3.(-t^6+15t^4-15t^2+1)+2.R.(1+t^2-t^4-t^6)-(1+3t^2+3t^4+t^6) \\ W_1 = R^2\cdot[3t^6-7t^4-7t^2+3]+2.[1+3t^2+3t^4+t^6] \end{cases}$$

cuyas relaciones subsisten para todos los valores de R.

Haciendo primero $R=1$ se tendrá

$$W = -4t^6+10.t^4-16t^2+2$$
$$W_1 = 5t^6-t^4-t^2+5$$

Como el grado de W no es inferior al de W_1, para calcular el valor de ∇_{ABC} aplicaremos la primera parte de la regla I. Realizando las operaciones clásicas en la investigación del $m.c.d.$ de W y W_1 pero con la salvedad allí indicada, encontraremos el siguiente cuadro de valores y de signos

	$-\infty$	0	$+\infty$
$W = -4t^6+10t^4-16.t^2+2$	$-$	$+$	$-$
$W_1 = 5.t^6-t^4-t^2+5$	$+$	$+$	$+$
$\frac{1}{2}.W_2 = -23.t^4+42.t^2-15$	$-$	$-$	$-$
$\frac{1}{160}.W_3 = -35.t^2+1$	$-$	$+$	$-$
$W_4 = +16928$	$+$	$+$	$+$

De aquí se deducirá que

$$\nabla_{ABC} = -1 \qquad \nabla_{CDA} = +1$$

El cálculo de ∇_{CA} se hará por medio de la fracción

$$\frac{M_1}{N_1} = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^3+2x-1}{3x^2+2} = \frac{W}{W_1}$$

encontrándose así

	$+1$	-1	0
$W = x^3+2x-1$	$+$	$-$	$-$
$W_1 = 3.x^2+2$	$+$	$+$	$+$
$W_2 = 4x+3$	$-$	$+$	$+$
$W_3 = -59$	$-$	$-$	$-$

por lo que resultará

$$\nabla_{CA} = +1 \qquad \nabla_{AC} = -1$$

Aplicando las fórmulas (1) tendremos

$$r = 1 \qquad i_n = 0 \qquad i_p = 0$$

es decir, que la ecuación dada tiene una raíz real comprendida entre 0 y ± 1, no existiendo raíz imaginaria alguna dentro de este círculo de radio 1. Que la raíz real es positiva, se comprueba inmediatamente por el último cuadro de signos.

Consideremos ahora la circunferencia de radio $R = 2$ para la cual se obtendrá

$$W = -13 \,.\, t^6 + 113 \,.\, t^4 - 119 \,.\, t^2 + 11$$
$$W_1 = 2 \,.\, (7 \,.\, t^6 - 11 \,.\, t^4 - 11 \,.\, t^2 + 7).$$

Efectuadas las operaciones respectivas tendremos

	$-\infty$	0	$+\infty$
$W = -13 \,.\, t^6 + 113 \,.\, t^4 - 119 \,.\, t^2 + 11$	—	+	—
$\frac{1}{2} W_1 = 7 \,.\, t^6 - 11 \,.\, t^4 - 11 \,.\, t^2 + 7$	+	+	+
$\frac{1}{8} \,.\, W_2 = -81 \,.\, t^4 + 122 \,.\, t^2 - 21$	—	—	—
$\frac{1}{112} \,.\, W_3 = 791 \,.\, t^2 - 417$	+	—	+
$W_4 = -13017024$	—	—	—

La serie anterior de funciones presentando 4 variaciones para $t = +\infty$ y $t = -\infty$, y sólo una para $t = 0$, nos dará

$$\nabla_{ABC} = 1 - 4 = -3 \qquad \nabla_{CDA} = 4 - 1 = +3$$

Para calcular ∇_{AC} y ∇_{CA} tendremos la misma serie $W, W_1, W_2 \ldots\ldots$ de funciones que antes, por lo cual

	-2	$+2$
$W = x^3 + 2 \,.\, x - 1$	—	+
$W_1 = 3 \,.\, x^2 + 2$	+	+
$W_2 = -4 \,.\, x + 3$	+	—
$W_3 = -59$	—	—

de donde resulta

$$\nabla_{CA} = 2 - 1 = +1 \qquad \nabla_{AC} = 1 - 2 = -1$$

Aplicando las fórmulas (1) obtendremos

$$r = \nabla_{CA} = 1$$
$$i_n = -\frac{1}{2} \,.\, \left(1 - 3\right) = -\frac{1}{2} \,.\, \left(-2\right) = 1$$

$$i_p = + \frac{1}{2} \cdot \left(-1 + 3\right) = \frac{1}{2} \cdot (2) = 1$$

igualdades que demuestran la existencia de una raíz real y dos imaginarias dentro de la circunferencia de radio 2. Resulta en definitiva, que la circunferencia de radio 1 comprende la raíz real de la ecuación; mientras que la corona anular, determinada por las dos circunferencias concéntricas de radios 1 y 2, respectivamente, abarca los dos puntos representativos de las dos raíces complejas de la ecuación. Quedan, por tanto, separadas las tres raíces de la función dada.

Investigación por rectángulos concéntricos.—Cuando la figura elegida es un rectángulo de lados paralelos á los ejes coordenados, resulta más fácil calcular los excesos parciales que entran en las fórmulas (1); pues entonces una de las dos variables x ó y es una cantidad constante, y la fracción

$$\frac{M(x\,y)}{N(x\,y)}$$

tiene sus dos términos dependientes de una misma coordenada. Por tal circunstancia es posible aplicarle inmediatamente la regla 1.ª, sin necesidad de acudir á ninguna transformación de variables, como ocurre en el caso general.

Tomando el origen de coordenadas por centro de varios rectángulos ó cuadrados de área sucesivamente creciente, será posible, siguiendo igual procedimiento que con los círculos, llegar á separar las raíces reales é imaginarias de la ecuación.

Sea, por ejemplo, la misma función ya estudiada

$$f(z) = z^3 + 2\,z - 1 = 0$$

que puede ponerse bajo la forma

$$f(z) = M + i \,.\, y \,.\, N = 0$$

en donde

$$M = f(x) - \frac{y^2}{1 \,.\, 2} \,.\, f''(x) = x^3 - 3\,x\,y^2 + 2\,x - 1$$

$$N = f'(x) - \frac{y^2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} \,.\, f'''(x) = -\,y^2 + 3 \,.\, x^2 + 2$$

Tracemos el cuadrado $A\ E\ B\ F\ C\ G\ D\ H$ con centro en 0 (Fi-

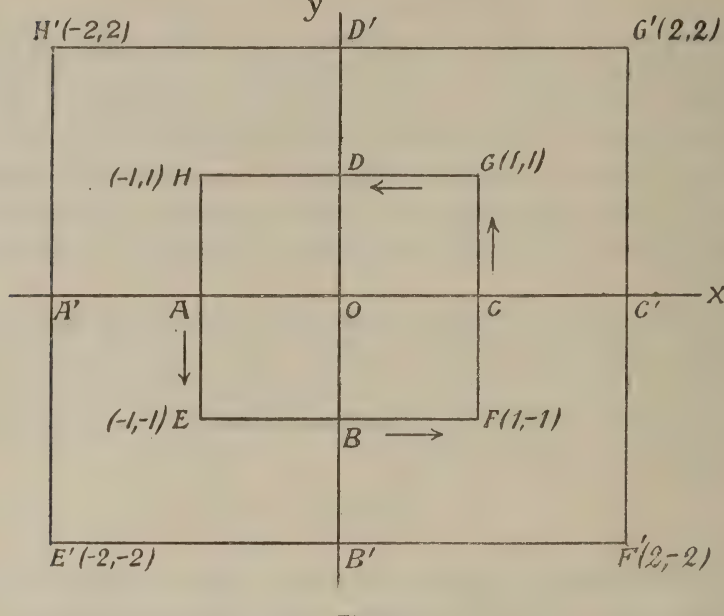


Fig. 11.

gura 11) y de lado 2, siendo el sentido considerado el que indican las flechas; tendremos

$$\begin{cases} \nabla_{A\,B\,C} = \nabla_{A\,E} + \nabla_{E\,F} + \nabla_{F\,C} \\ \nabla_{C\,D\,A} = \nabla_{C\,G} + \nabla_{G\,H} + \nabla_{H\,A} \end{cases}$$

La ecuación de la recta $H\ E$ es $x = -1$, cuyo valor sustituído en M y N dan

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{3\,y^2 - 4}{-\,y^2 + 5}$$

de donde se deducirá el cuadro

	0	− 1	+ 1
$V = 3\,y^2 - 4$	−	−	−
$V_1 = -\,y^2 + 5$	+	+	+
$V_2 = -\,11$	−	−	−

por lo que

$\nabla_{AE} = 2 - 2 = 0$ $\qquad$ $\nabla_{HA} = 2 - 2 = 0$

Para el lado $E\,F$, caracterizado por la relación $y = -1$, se tendrá

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{x^3 - x - 1}{3\,x^2 + 1}$$

Conviene observar que para el lado $G\,H$ definido por $y = +1$ se llega á este mismo resultado; razón por la cual encontraremos simultáneamente los valores de ∇_{EF} y ∇_{GH}.

Efectuando las divisiones conocidas obtendremos

	-1	$+1$
$V = x^3 - x - 1$	$-$	$-$
$V_1 = 3\,x^2 + 1$	$+$	$+$
$V_2 = 4\,.\,x + 3$	$-$	$+$
$V_3 = -43$	$-$	$-$

de donde

$\nabla_{GH} = 2 - 2 = 0$ $\qquad$ $\nabla_{EF} = 2 - 2 = 0$

Siendo $x = +1$ la ecuación de la recta $F\,G$, se deduce para ella

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{-3\,y^2 + 2}{-y^2 + 5}$$

	-1	0	$+1$
$V = -3\,y^2 + 2$	$-$	$+$	$-$
$V_1 = -y^2 + 5$	$+$	$+$	$+$
$V_2 = +13$	$+$	$+$	$+$

por lo que resulta

$\nabla_{FC} = 0 - 1 = -1$ $\qquad$ $\nabla_{CG} = 1 - 0 = +1$

La recta $C\,A$ tiene por ecuación $y = 0$, así es que en este caso

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{x^3 + 2\,x - 1}{3\,.\,x^2 + 2}$$

	$+1$	-1	0
$V = x^3 + 2x - 1$	$+$	$-$	$-$
$V_1 = 3x^2 + 2$	$+$	$+$	$+$
$V_2 = -4x + 3$	$-$	$+$	$+$
$V_3 = -59$	$-$	$-$	$-$

deduciéndose

$$\nabla_{CA} = 2 - 1 = +1 \qquad \nabla_{AC} = 1 - 2 = -1$$

En virtud de los valores parciales encontrados tendremos

$$\nabla_{ABC} = -1 \qquad \nabla_{CDA} = +1$$

así es que, en definitiva, las fórmulas (1) darán

$$\begin{cases} r = 1 \\ i_n = -\frac{1}{2}(1-1) = 0 \\ i_p = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \end{cases}$$

lo que prueba la existencia de una raíz real de la ecuación dentro del cuadrado de lado 2; dicha raíz es positiva y comprendida entre 0 y 1.

Consideremos ahora el cuadrado $A'\,E'\,B'\,F'\,C'\,G'\,D'\,H'$ concéntrico al anterior, pero de lado 4. La marcha de los cálculos es exactamente igual que antes.

Para al lado $H'\,E'$ se tiene $x = -2$, por lo que

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{6y^2 - 13}{-y^2 + 14}$$

	-2	0	$+2$
$V = 6y^2 - 13$	$+$	$-$	$+$
$V_1 = -y^2 + 14$	$+$	$+$	$+$
$V_2 = -71$	$-$	$-$	$-$

de donde

$$\nabla_{A'E'} = 1 - 2 = -1 \qquad \nabla_{H'A'} = 2 - 1 = +1$$

Las dos rectas $E'\,F''$ y $G'\,H'$ definidas respectivamente por las

ecuaciones $y = -2$, $y = +2$, producen ambas el siguiente resultado:

$$\frac{M}{N} = \frac{x^3 - 10\,x - 1}{3\,x^2 - 2} = \frac{V}{V_1}$$

	$+2$	-2
$V = x^3 - 10\,x - 1$	$-$	$+$
$V_1 = 3\,x^2 - 2$	$+$	$+$
$V_2 = 28\,.\,x + 3$	$+$	$-$
$V_3 = +1541$	$+$	$+$

$$\nabla_{E'F'} = 1 - 2 = -1 \qquad \nabla_{G'H'} = 2 - 1 = +1$$

Para calcular $\nabla_{C'A'}$ y $\nabla_{A'C'}$ tendremos la misma serie de funciones que para ∇_{CA} y ∇_{AC}, es decir

	-2	$+2$
$V = x^3 + 2\,x - 1$	$-$	$+$
$V_1 = 3\,x^2 + 2$	$+$	$+$
$V_2 = -4\,x + 3$	$+$	$-$
$V_3 = -59$	$-$	$-$

resultando entonces

$$\nabla_{C'A'} = 2 - 1 = +1 \qquad \nabla_{A'C'} = 1 - 2 = -1$$

La ecuación del lado $F'\,G'$ siendo $x = +2$ se tendrá

$$\frac{M}{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{-6\,y^2 + 11}{-y^2 + 14}$$

	-2	0	$+2$
$V = -6\,y^2 + 11$	$-$	$+$	$-$
$V_1 = -y^2 + 14$	$+$	$+$	$+$
$V_2 = +73$	$+$	$+$	$+$

valiendo pues

$$\nabla_{F'C'} = 0 - 1 = -1 \qquad \nabla_{C'G'} = 1 - 0 = +1$$

De todo lo anterior resulta

$$\nabla_{A'B'C'} = \nabla_{A'E'} + \nabla_{E'F'} + \nabla_{F'C'} = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$\nabla_{C'D'A'} = \nabla_{C'G'} + \nabla_{G'H'} + \nabla_{H'A'} = 1 + 1 + 1 = +3$$

y aplicando las fórmulas (1)

$$\begin{cases} i_n = -\frac{1}{2}(1 - 3) = -\frac{1}{2}(-2) = 1 \\ i_p = \frac{1}{2}(-1 + 3) = \frac{1}{2}(2) = 1 \\ r = 1 \end{cases}$$

lo que prueba están las tres raíces de la ecuación encerradas por este segundo cuadrado. El problema propuesto queda totalmente resuelto, estando así separada la raíz real de las dos imaginarias.

Queda así comprobado, que para funciones reales, es preferible aplicar nuestro teorema del § 1, que no el teorema de Cauchy, desde el momento que simplifica algo los cálculos (cuando el contorno elegido es un rectángulo) y resuelve íntegramente el problema de investigar el número de raíces imaginarias positivas, imaginarias negativas y reales encerradas por un contorno cualquiera, precisando además cuántas son reales positivas y cuántas negativas.

§ 25.—Aplicación á las funciones esféricas.

Consideremos las funciones esféricas definidas por las igualdades siguientes:

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$$P_3(x) = \frac{5}{2}\left(x^3 - \frac{3}{5} \cdot x\right)$$

. . . .

. . . .

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cdot x^{n-2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1) \cdot (2n-3)} \cdot x^{n-4} - \ldots\right]$$

La función $P_n(x)$ es de grado n en x, con potencias de esta variable todas pares ó impares según que n sea á su vez par ó impar.

Es fácil comprobar que las funciones esféricas satisfacen las siguientes relaciones

(1) $n \cdot P_n(x) - (2n-1) \cdot x \cdot P_{n-1}(x) + (n-1) \cdot P_{n-2}(x) = 0$

(2) $P_1(x) = x \cdot P_0(x)$

(3) $(1-x^2) \cdot E_1 P_n(x) - n \cdot P_n(x) + n \cdot x \cdot P_{n-1}(x) = 0$

Las propiedades de la serie

(4) $P_m \quad P_{m-1} \quad P_{m-2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot P_1 \quad P_0$

formada á partir de una función cualquiera P_m, son:

1.° *El último término* P_0 *no se anula y permanece con signo constante para cualquier valor de* x, pues según vimos $P_0 = 1$

2.° *Dos funciones consecutivas de la serie* (4) *no se anulan para un mismo valor de* x, porque si al mismo tiempo se tuviese

$$P_n(x) = 0 \qquad P_{n-1}(x) = 0$$

la relación (1) nos demuestra que entonces también $P_{n-2} = 0$ y así sucesivamente hasta llegar á $P_0 = 0$; resultado absurdo que prueba esta propiedad.

3.° *Si una función de la serie* (4) *se anula para un cierto valor de* x, *las dos funciones próximas adquieren signos contrarios.*

La igualdad (1) prueba efectivamente que si $P_{n-1}(a) = 0$ entonces

$$n \cdot P_n(a) = -(n-1) \cdot P_{n-2}(a)$$

4.° *Las funciones* $P_m(x)$ *y* $E_1 P_m(x)$ *no se anulan para el mismo valor de la variable*, pues de suceder así, la igualdad (3) nos llevaría á la conclusión de que $P_m(x)$ y $P_{m-1}(x)$ serían nulos simultáneamente, cosa imposible después de la propiedad 2.ª

5.° *Para raíces de* $P_m(x)$ *comprendidas entre* 0 *y* + 1, *la euleriana de* $P_m(x)$ *tiene signo contrario á* $P_{m-1}(x)$, *es decir, que en este intervalo la fracción* $\frac{P_m(x)}{P_{m-1}(x)}$ *pasa al anularse de negativa á positiva.*

Dando en (3) á x el valor $\alpha \gtrless \begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ el binomio $1 - x^2$ será positivo, luego, como $P_m(\alpha) = 0$, tendremos

$$(1 - \alpha^2)\, E_1\, P_m(\alpha) = - n \,.\, \alpha \,.\, P_{m-1}(\alpha)$$

de donde se deduce que efectivamente $E_1\, P_m(\alpha)$ y $P_{m-1}(\alpha)$ son de signos contrarios.

6.º *Para raíces de* $P_m(x)$ *comprendidas entre* 0 *y* — 1, *la euleriana de* $P_m(x)$ *tiene el mismo signo que* $P_{m-1}(x)$, *es decir, que en este intervalo el cociente* $\frac{P_m(x)}{P_{m-1}(x)}$ *pasa al anularse de negativa á positiva.*

Para un valor de x igual á $\alpha \begin{smallmatrix} < 0 \\ > -1 \end{smallmatrix}$, el factor $1 - x^2$ será también positivo, pues en valor absoluto α vale menos que 1. Como $P_m(\alpha) = 0$ la igualdad (3) se convierte en

$$(1 - \alpha^2) \,.\, E_1\, P_m(\alpha) = n \,.\, \alpha^1 \,.\, P_{m-1}(\alpha)$$

llamando α^1 al valor absoluto de α. Vemos así que

$$E_1\, P_m(\alpha) \text{ y } P_{m-1}(\alpha)$$

son del mismo signo.

Haciendo en (3) $x = 1$ nos resulta

$$P_n(1) = P_{n-1}(1) = P_{n-2}(1) \ldots\ldots = P_1\ (1) = 1$$

mientras que poniendo $x = -1$ tendremos

$$P_n(-1) = - P_{n-1}(-1)$$
$$P_{n-1}(-1) = - P_{n-2}(-1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_2(-1) = - P_1(-1)$$

igualdades que multiplicadas dan

$$P_n(-1) = (-1)^{n-1} \,.\, P_1(-1) = (-1)^n \,.$$

Podrán ocurrir dos casos:

1.º *Que m sea un número par.*

Sustituyendo en la serie (4) x por cero, es fácil ver, dado el valor de las funciones esféricas, que el número de variaciones que entonces aparecen es

$$v_0 = \frac{m}{2}$$

Haciendo luego $x = +1$, la serie (4) carece de variaciones, pues todos sus términos se reducen á la unidad; de modo que

$$v_1 = 0$$

Poniendo $x = -1$, los términos de (4) valen alternativamente $+1$ y -1, luego

$$v_{-1} = m .$$

En virtud de las seis propiedades características de las funciones $P_n(x)$ y del § 23, podremos escribir

$v_0 - v_1 = \frac{m}{2} = r_p =$ número de raíces reales de $P_m(x)$ comprendidas de 0 á $+1$

$v_{-1} - v_0 = m - \frac{m}{2} = r_n =$ » » » $P_m(x)$ » de 0 á -1

Como

$$r_n + r_p = m$$

resultará que $P_m(x) = 0$ tiene sus m raíces reales comprendidas entre -1 y $+1$.

2.º *Que m sea un número impar.*

Las siguientes sustituciones en (4) dan respectivamente

$$x = 0 \dots\dots\dots\dots v_0 = \frac{m-1}{2}$$
$$x = +1 \dots\dots\dots\dots v_1 = 0$$
$$x = -1 \dots\dots\dots\dots v_{-1} = m$$

luego como antes

$v_0 - v_1 = \frac{m-1}{2} = r_p =$ número de raíces reales de $P_m(x) = 0$ comprendidas entre 0 y $+1$

$v_{-1} - v_0 = m - \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2} = r_n =$ número de raíces reales de $P_m(x) = 0$ comprendidas entre 0 y -1

y siendo

$$r_p + r_n = m$$

deduciremos que en general
la ecuación $P_m(x) = 0$, de grado m, tiene todas sus raíces reales y comprendidas entre -1 y $+1$, ya sea m par ó impar.

§ 26.—Expresión de los términos de la serie fundamental en función de las raíces de la ecuación dada.

Teorema I.—*Sea $W(x)$ una ecuación de grado m cuyas raíces designamos por $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ y en la cual suponemos para mayor facilidad que el coeficiente de x^m es igual á 1. Si W_1 representa la euleriana de W con relación á x, dividamos W por W_1 siguiendo después las operaciones para encontrar el máximo común divisor de ambas, con la única precaución de cambiar el signo á los restos antes de pasar á ser divisores de los cocientes próximos, y terminando cuando se llegue á un residuo independiente de x. Designando por $W_2, W_3, W_4 \ldots\ldots W_m$ los restos así encontrados, la serie fundamental*

$$W,\ W_1,\ W_2,\ W_3 \ldots\ldots W_m$$

está compuesta de términos que pueden expresarse en función de x y de las raíces $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$, del modo siguiente

( )
$$\begin{cases} W = f(x) = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_m) \\ W_1 = E_1 f(x) = \Sigma(-1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_m)\cdot x_1 \\ W_2 = \dfrac{1}{\lambda_2}\cdot\Sigma(-1)^2\cdot(x_1 - x_2)^2\cdot(x - x_3)\cdot(x - x_4)\ldots\ldots(x - x_m)\cdot x_1\cdot x_2 \\ W_3 = \dfrac{1}{\lambda_3}\cdot\Sigma(-1)^3\cdot(x_1 - x_2)^2\cdot(x_1 - x_3)^2\cdot(x_2 - x_3)^2\cdot(x - x_4)\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\ldots\ldots(x - x_m)\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3 \\ W = \dfrac{1}{\lambda_4}\cdot\Sigma(-1)^4\cdot(x_1 - x_2)^2\ldots\ldots(x_1 - x_4)^2\cdot(x_2 - x_3)^2\ldots \\ \qquad\qquad\ldots(x_3 - x_4)^2\cdot(x - x_5)\cdot(x - x_6)\ldots(x - x_m)\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot x_4\cdot \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ W_m = \dfrac{1}{\lambda_m}\cdot(-1)^m\cdot(x_1 - x_2)^2\cdot(x_1 - x_3)^2\ldots(x_1 - x_m)^2\cdot(x_2 - x_3)^2\ldots \\ \qquad\qquad\ldots(x_{m-1} - x_m)^2\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots\ldots x_m \end{cases}$$

estando las cantidades $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \ldots\ldots \lambda_m$ determinadas por las fórmulas

$$(2)\quad \begin{cases} \lambda_2 = p_1^2 \\ \lambda_3 = \left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)^2 \\ \lambda_4 = \left(\dfrac{p_1 \cdot p_3}{p_2}\right)^2 \\ \lambda_5 = \left(\dfrac{p_2 \cdot p_4}{p_1 \cdot p_3}\right)^2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} p_1 = \Sigma(-1) \cdot x_1 = a_1 \\ p_2 = \Sigma(-1)^2 \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \\ p_3 = \Sigma(-1)^3 \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \\ p_4 = \Sigma(-1)^4 \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdot (x_1 - x_4)^2 \cdot (x_2 - x_3)^2 \cdot \\ \qquad \cdot (x_2 - x_4)^2 \cdot (x_3 - x_4)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_m = (-1)^m \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots (x_{m-1} - x_m)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_m \end{cases}$$

en donde cada Σ *representa una función simétrica de las raíces.* (Corral.)

Este teorema es correlativo al de Sylvester sobre las funciones de la serie de Sturm.

Las primera y segunda fórmulas del conjunto (1) son ya conocidas.

Suponiendo que los cocientes obtenidos en las operaciones del máximo común divisor sean

$$Q_1 \qquad Q_2 \qquad Q_3 \ldots\ldots \qquad Q_{m-1}$$

tendremos las igualdades

$$\begin{cases} W = W_1 \cdot Q_1 - W_2 \\ W_1 = W_2 \cdot Q_2 - W_3 \\ W_2 = W_3 \cdot Q_3 - W_4 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ W_{m-2} = W_{m-1} \cdot Q_{m-1} - W_m \end{cases}$$

en donde se deduce fácilmente que

$$W_\mu = W_1 \, . \, S_\mu - W . \, T_\mu$$

siendo S_μ un polinomio de grado $(\mu - 1)$, mientras que T_μ es de grado $(\mu - 2)$. Recordando que $W_1 = E_1 \, f(x)$ obtendremos

$$(4) \qquad \frac{W_\mu}{S_\mu} = E_1 \, f(x) - \frac{T_\mu}{S_\mu} \cdot f(x)$$

Si en lugar de la variable x sustituímos en (4) los valores sucesivos $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ de las m raíces de $f(x) = 0$, la fracción racional $\frac{W_\mu}{S_\mu}$ tomará los m valores

$$E_1 f(x_1) \qquad E_1 f(x_2) \qquad E_1 f(x_3) \ldots\ldots E_1 f(x_m)$$

Como por otra parte, la función W_μ es de grado $(m - \mu)$ y S_μ de grado $(\mu - 1)$, el producto $W_\mu \, . \, S_\mu$ será de grado $(m - 1)$. Según la fórmula de Cauchy (obra citada de Serret, tomo I, página 518) podremos entonces escribir

$$W_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu^{\,1}} \, . \, \Sigma \, E_1 f(x_1) \, . \, E_1 f(x_2) \ldots\ldots E_1 f(x_\mu) \times$$

$$\times \frac{(x - x_{\mu+1}) \cdot (x - x_{\mu+2}) \cdot (x - x_{\mu+3}) \ldots\ldots (x - x_m)}{\left[(x_1 - x_{\mu+1}) \cdot (x_1 - x_{\mu+2}) \cdots (x_1 - x_m)\right] \cdots \left[(x_\mu - x_{\mu+1}) \cdots (x_\mu - x_m)\right]}$$

$$S_\mu = \frac{1}{\lambda_\mu^{\,1}} \, . \, \Sigma \, E_1 f(x_1) \cdot E_1 f(x_2) \ldots\ldots E_1 f(x_{\mu-1}) \times$$

$$\times \frac{(x_1 - x) \cdot (x_2 - x) \ (x_3 - x) \ldots\ldots (x_{\mu-1} - x)}{\left[(x_1 - x_\mu) \cdot (x_1 - x_{\mu+1}) \cdots (x_1 - x_m)\right] \cdots \left[(x_{\mu-1} - x_\mu) . (x_{\mu-1} - x_{\mu+1}) \ldots (x_{\mu-1} \ \ x_m)\right]}$$

Ahora bien, sabemos se tiene

$$E_1 f(x_1) = - x_1 \cdot \left[(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_1 - x_\mu) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[(x_1 - x_{\mu+1}) \cdot (x_1 - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x_1 - x_m) \right]$$

$$E_1 f(x_2) = - x_2 \left[(x_2 - x_1) \cdot (x_2 - x_3) \ldots\ldots (x_2 - x_\mu) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[(x_2 - x_{\mu+1}) \cdot (x_2 - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x_2 - x_m) \right]$$

. . . .

$$E_1 f(x_{\mu-1}) = - x_{\mu-1} \left[(x_{\mu-1} - x_1) \cdot (x_{\mu-1} - x_2) \ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_\mu) \right] \cdot$$
$$\cdot \left[(x_{\mu-1} - x_{\mu+1}) \cdot (x_{\mu-1} - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_m) \right]$$

$$E_1 f(x_\mu) = - x_\mu \cdot [(x_\mu - x_1) \cdot (x_\mu - x_2) \ldots\ldots (x_\mu - x_{\mu-1})] \cdot$$
$$\cdot [(x_\mu - x_{\mu+1}) \cdot (x_\mu - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x_\mu - x_m)]$$

igualdades que multiplicadas dan

(5)
$$E_1 f(x_1) \cdot E_1 f(x_2) \ldots\ldots E_1 f(x_\mu) =$$
$$= (-1)^\mu \cdot (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}} \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_\mu \times$$
$$\times [(x_1 - x_2)^2 \ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_\mu)^2] \cdot [(x_1 - x_{\mu+1}) \ldots (x_1 - x_m)] \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots [(x_\mu - x_{\mu+1}) \cdot (x_\mu - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x_\mu - x_m)]$$

(6)
$$E_1 f(x_1) \cdot E_1 f(x_2) \ldots\ldots E_1 f(x_{\mu-1}) =$$
$$= (-1)^{\mu-1} \cdot (-1)^{\frac{(\mu-1)\cdot(\mu-2)}{1 \cdot 2}} \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_{\mu-1} \times$$
$$\times [(x_1 - x_2)^2 \ldots (x_{\mu-1} - x_{\mu-2})^2] \cdot [(x_1 - x_\mu) \ldots (x_1 - x_m)] \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots [(x_{\mu-1} - x_\mu) \cdot (x_{\mu-1} - x_{\mu+1}) \ldots (x_{\mu-1} - x_m)]$$

Sustituyendo los valores (5) y (6) en las expresiones de W_μ y S_μ, obtendremos

$$W_\mu = (-1)^{\frac{\mu \cdot (\mu-1)}{1 \cdot 2}} \cdot \frac{1}{\lambda_\mu^1} \cdot \Sigma (-1)^\mu \cdot (x_1 - x_2)^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_\mu)^2 \cdot (x - x_{\mu+1}) \cdot (x - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x - x_m) \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_\mu$$

$$S_\mu = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}} \cdot \frac{1}{\lambda^1_\mu} \cdot \Sigma (-1)^{\mu-1} \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_{\mu-2})^2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots (x - x_{\mu-1}) \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_{\mu-1}$$

y si hacemos

$$(-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{1 \cdot 2}} \cdot \frac{1}{\lambda^1_\mu} = \frac{1}{\lambda_\mu}$$

se tendrá entonces

(7)
$$\left\{ \begin{array}{l} W_\mu = \dfrac{1}{\lambda_\mu} \cdot \Sigma (-1)^\mu \cdot (x_1 - x_2)^2 \ldots\ldots (x_\mu - x_{\mu-1})^2 \cdot (x - x_{\mu+1}) \cdot \\ \quad \cdot (x - x_{\mu+2}) \ldots\ldots (x - x_{m-1}) \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_\mu \\ S_\mu = \dfrac{1}{\lambda_\mu} \cdot \Sigma (-1)^{\mu-1} \cdot (x_1 - x_2)^2 \ldots\ldots (x_{\mu-1} - x_{\mu-2})^2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \ldots\ldots \\ \quad \ldots\ldots (x - x_{\mu-1}) \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots\ldots x_{\mu-1} \end{array} \right.$$

En el caso de que $\mu = m$, las igualdades (7) toman la forma

$$W_m = \frac{1}{\lambda_m} \cdot (-1)^m \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots\cdots (x_{m-1} - x_m)^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_m$$

$$S_m = \frac{1}{\lambda_m} \cdot \Sigma (-1)^{m-1} \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots (x_{m-2} - x_{m-1})^2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdots\cdots (x - x_{m-1}) \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_{m-1} \cdot$$

y cuando $\mu = 1$ tendremos

$$W_1 = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \Sigma (-1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) \cdots\cdots (x - x_m) \cdot x_1$$

$$S_1 = \frac{1}{\lambda_1}$$

Como la expresión de W_1 viene dada por la segunda fórmula del grupo (1), es evidente que $\lambda_1 = 1$ por lo cual $S_1 = 1$.

Para determinar completamente W_μ y S_μ queda por conocer λ_μ.

Según puede verse en el Serret, tomo I, pág. 575, es fácil demostrar que

$$\text{límite } \frac{S_{\mu+1} \cdot W_\mu}{S_1 \; W} = 1 \text{ cuando } x = \infty$$

Ahora bien, el coeficiente de la potencia más elevada de x en el producto $S_{\mu+1} \cdot W_\mu$ es

$$\frac{1}{\lambda_\mu \cdot \lambda_{\mu+1}} \left[\Sigma (-1)^\mu \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots\cdots (x_\mu - x_{\mu-1})^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_\mu \right]^2$$

de modo que si llamamos

(7) $$p_\mu = \Sigma (-1)^\mu \cdot (x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots\cdots (x_\mu - x_{\mu-1})^2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdots\cdots x_\mu$$

dicho coeficiente valdrá

$$\frac{p_\mu^{\;2}}{\lambda_\mu \cdot \lambda_{\mu+1}}$$

El coeficiente de la potencia más elevada de x en el producto $S_1 \cdot W$ es la unidad, pues $S_1 = 1$. Se tendrá, por tanto,

$$p_\mu^{\;2} = \lambda_\mu \cdot \lambda_{\mu+1}$$

de donde

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_1 . \lambda_2 = p_1^{\,2} \qquad \lambda_2 . \lambda_3 = p_2^{\,2} \ldots\ldots \lambda_{m-1} . \lambda_m = p_m^{\,2}$$

cuyas ecuaciones dan las igualdades (2), mientras que de la fórmula (7) se deduce el grupo (3); quedando así completamente demostrado el teorema.

Corolario I.—*Para que la ecuación $W = 0$ tenga todas sus raíces reales, es condición necesaria y suficiente que las cantidades*

$$\Sigma (x_1 - x_2)^2 , \Sigma (x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 . (x_2 - x_3)^2 ,$$
$$\ldots\ldots (x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_{m-1} - x_m)^2$$

sean todas positivas.

Las cantidades $\lambda_1 , \lambda_2 , \lambda_3 \ldots\ldots \lambda_m$ que aparecen en las expresiones de $W_1 , W_2 , W_3 \ldots\ldots W_m$ son esencialmente positivas, pues los coeficientes de la ecuación dada se suponen siempre números reales. De aquí la posibilidad de prescindir de tales factores cuando sólo se considere el signo de las funciones W_μ para un determinado valor de x.

Al hacer $x = + \infty$ en una función, su signo será el que tenga su primer término; así, al sustituir en la serie

$$(8) \qquad W \qquad W_1 \qquad W_2 \qquad W_3 \ldots\ldots W_m$$

x por $+ \infty$, los signos de estos polinomios serán respectivamente los que tengan las cantidades

$$1 \qquad p_1 \qquad p_2 \qquad p_3 \ldots\ldots p_m$$

las cuales presentarán $v_{+\infty}$ variaciones.

Poniendo ahora en (8) el valor $x = - \infty$, sus términos tendrán el mismo signo que

$$(-1)^m , (-1)^{m+1} . p_1 , (-1)^{m-2} . p_2 , (-1)^{m-3} . p_3 \ldots\ldots (-1)^0 . p_m$$

cantidades que presentarán $v_{-\infty}$ variaciones.

Si en (8) sustituímos x por 0 y recordamos que

$$(-1)^m . x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_m = a_m$$

la serie (8) se reduce á

$$a_m \qquad a_m \,.\, \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 \qquad a_m \,.\, \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 \,.\, (x_1 - x_3)^2 \,.\, (x_2 - x_3)^2 \,,$$
$$\ldots\ldots a_m \,.\, (x_1 - x_2)^2 \,.\, (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_1 - x_m)^2$$

la cual presenta en general, v_0 variaciones; número igual que las variaciones de las cantidades siguientes

$$(9) \qquad 1 \qquad \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 \qquad \Sigma\,(x_1 - x_2)^2 \,.\, (x_1 - x_3)^2 \,.\, (x_2 - x_3)^2 \,,$$
$$\ldots\ldots (x_1 - x_2)^2 \,.\, (x_1 - x_3)^2 \ldots\ldots (x_1 - x_m)^2$$

Según sabemos

$$v_{-\infty} - v_0 = n$$
$$v_0 - v_{+\infty} = - p$$

si n representa el número de las raíces negativas de $W = 0$ y p el de las positivas; resultará por tanto — si observamos que $v_{+\infty} + v_{-\infty} = m$ — la igualdad

$$2\,v_0 = m - (n + p)$$

El número de raíces imaginarias de $W = 0$ es evidentemente

$$2\,I = m - (n + p)$$

luego deducimos

$$I = v_0$$

La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la ecuación dada sean reales, es que $I = v_0 = 0$, ó sea que todas las cantidades de la serie (9) resulten números positivos.

§ 27.—Otro método para calcular el número exacto de raíces reales de una ecuación comprendidas entre dos límites dados.

El procedimiento que vamos á exponer es semejante al método de Hermite para resolver el problema enunciado, y tiene como éste por fundamento, notables propiedades de las funciones homogéneas de segundo grado.

Sea la ecuación

$$F(z) = 0$$

de coeficientes reales, cuyas raíces expresamos por

$$x_1 , x_2 , x_3 \ldots\ldots x_m$$

Si t representa una cantidad indeterminada, formemos la siguiente función de segundo grado

$$g = \frac{x_1}{x_1 - t} (z_0 + x_1 . z_1 + x_1^2 . z_2 + x_1^3 . z_3 + \ldots\ldots + x_1^{m-1} . z_{m-1})^2 +$$

$$+ \frac{x_2}{x_2 - t} (z_0 + x_2 . z_1 + x_2^2 . z_2 + x_2^3 . z_3 + \ldots\ldots + x_2^{m-1} . z_{m-1})^2 +$$

. . . .

. . . .

$$+ \frac{x_m}{x_m - t} (z_0 + x_m . z_1 + x_m^2 . z_2 + x_m^3 . z_3 + \ldots\ldots + x_m^{m-1} . z_{m-1})^2 \quad \text{(1)}$$

en donde $z_0 , z_1 , z_2 , z_3 \ldots\ldots z_{m-1}$ son m variables independientes.

Se observa inmediatamente que g es simétrica con relación á las raíces de $F(z) = 0$, por lo cual sus coeficientes podrán ser expresados en función racional de los coeficientes de $F(z)$. Como estos son reales, resultará que g es una función real, siempre que á la indeterminada t no se le atribuyan valores imaginarios. De aquí deducimos la posibilidad de expresar á g bajo la siguiente forma

$$\text{(2)} \qquad g = \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=m-1} a_{ij} . z_i . z_j$$

siendo fácil ver que

$$\text{(3)} \quad a_{ij} = \frac{x_1^{i+j+1}}{x_1 - t} + \frac{x_2^{i+j+1}}{x_2 - t} + \frac{x_3^{i+j+1}}{x_3 - t} + \ldots\ldots + \frac{x_m^{i+j+1}}{x_m - t}$$

Podemos descomponer la fracción racional

$$\frac{t^{i+j} E_1 F(t)}{F(t)}$$

en una suma de fracciones simples, aplicando las fórmulas halladas en el § 15. Llamando $Q(t)$ la parte entera de dicho cociente, se tendrá

$$\frac{t^{i+j} E_1 F(t)}{F(t)} = Q(t) - \frac{x_1^{i+j+1}}{t - x_1} - \frac{x_2^{i+j+1}}{t - x_2} -$$

$$- \frac{x_3^{i+j+1}}{t - x_3} - \ldots\ldots - \frac{x_m^{i+j+1}}{t - x_m}$$

de modo que designando por $F_{ij}(t)$ el residuo de la división de $t^{i+j} . E_1 F(t)$ por $F(t)$, podremos establecer

$$\frac{F_{ij}(t)}{F(t)} = \frac{x_1^{i+j+1}}{x_1 - t} + \frac{x_2^{i+j+1}}{x_2 - t} + \frac{x_3^{i+j+1}}{x_3 - t} + \ldots\ldots + \frac{x_m^{i+j+1}}{x_m - t}$$

y en virtud de (3) resultará

$$a_{ij} = \frac{F_{ij}(t)}{F(t)}$$

así como por la (2)

$$g = \sum_{i=0}^{i=m-1} \sum_{j=0}^{j=m-1} \frac{F_{ij}(t)}{F(t)} . z_i . z_j$$

Llamando ∇_{m-1} el discriminante de g, se sabe (obra citada de Serret, tomo I, pág. 551) que es igual al producto de

$$\frac{x_1 . x_2 . x_3 \ldots\ldots x_m}{(x_1 - t) . (x_2 - t) \ldots\ldots (x_m - t)}$$

por el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \ldots\ldots & x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \ldots\ldots & x_2^{m-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & \ldots\ldots & x_3^{m-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ 1 & x_m & x_m^2 & x_m^3 & \ldots\ldots & x_m^{m-1} \end{vmatrix}$$

y teniendo en cuenta el valor de tal determinante, resultará

$$\nabla_{m-1} = x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_m . \frac{(x_1 - x_2)^2 . (x_1 - x_3)^2 \ldots (x_{m-1} - x_m)^2}{(x_1 - t) . (x_2 - t) \ldots (x_m - t)}$$

Vamos ahora á calcular el valor de $\nabla_{m-\mu}$, discriminante de la función obtenida cuando en g se reducen á cero las $\mu - 1$ variables

$$z_{m-1} \qquad z_{m-2} \ldots\ldots z_{m-\mu+1}$$

En tal caso, la función g estará dada por la fórmula (2) suponiendo que i y j no reciben más que $(m - \mu + 1)$ valores contados

desde 0 á $(m - \mu)$; la igualdad (3) seguirá dando los coeficientes de g

$$a_{ij} = x_1^{i+1} \cdot \frac{x_1^j}{x_1 - t} + x_2^{i+1} \cdot \frac{x_2^j}{x_2 - t} + x_3^{i+1} \cdot \frac{x_3^j}{x_3 - t} + \\ + \ldots\ldots + x_m^{i+1} \cdot \frac{x_m^j}{x_m - t}$$

El invariante $\nabla_{m-\mu}$ es igual á la suma de los productos obtenidos multiplicando dos á dos los determinantes siguientes:

1.º Unos formados con $(m - \mu + 1)$ columnas horizontales y verticales, estando las líneas horizontales representadas por

$$x_1^{i+1} \quad x_2^{i+1} \quad x_3^{i+1} \ldots\ldots x_m^{i+1}$$

2.º Los otros constituídos por igual número de líneas horizontales

$$\frac{x_1^j}{x_1 - t} + \frac{x_2^j}{x_2 - t} + \frac{x_3^j}{x_3 - t} + \ldots\ldots + \frac{x_m^j}{x_m - t}$$

y verticales que los anteriores.

Cada uno de los índices i, j recibe los valores $0, 1, 2, 3 \ldots (m - \mu)$ según antes se dijo. Los primeros determinantes valen

$$\pm x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{m-\mu+1} \cdot (x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \cdot \ldots\ldots (x_{m-\mu} - x_{m-\mu+1})$$

mientras que los segundos tienen por equivalente á

$$\pm \frac{(x_1 - x_2) \cdot (x_1 - x_3) \ldots\ldots (x_{m-\mu} - x_{m-\mu+1})}{(x_1 - t) \cdot (x_2 - t) \ldots\ldots (x_m - t)}$$

razón por la cual

$$\nabla_{m-\mu} = \Sigma\, x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_{m-\mu+1} \cdot \frac{(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 - x_3)^2 \cdots (x_{m-\mu} - x_{m-\mu+1})^2}{(x_1 - t) \cdot (x_2 - t) \ldots\ldots (x_m - t)}$$

refiriéndose el signo Σ á todas las combinaciones que pueden hacerse con las m raíces tomadas $(m - \mu + 1)$ á $(m - \mu + 1)$ veces.

Cuando todas las variables de g excepto z_0 sean nulas, se tendrá

$$\nabla_0 = \Sigma \frac{x_1}{x_1 - t}$$

llamando ∇_0 el coeficiente de z_0^2 en la fórmula (2).

En la obra de Serret, tomo I, páginas 563 y 564, se demuestra que una función tal como g, por medio de una sustitución real es transformada en

$$g = \nabla_0 \,.\, X_0^{\,2} + \frac{\nabla_1}{\nabla_0} \,.\, X_1^{\,2} + \frac{\nabla_2}{\nabla_1} \,.\, X_2^{\,2} + \ldots\ldots + \frac{\nabla_{m-1}}{\nabla_{m-2}} \,.\, X^2_{\,m-1}$$

donde X_0, X_1, $X_2 \ldots\ldots X_{m-1}$ son funciones lineales de las variables z_0, z_1, $z_2 \ldots\ldots z_{m-1}$.

Podemos ahora enunciar el teorema siguiente:

Teorema I.—*Sea la ecuación $F(z) = 0$ del grado m con coeficientes reales y raíces desiguales x_1, x_2, $x_3 \ldots\ldots x_m$. Formemos la función real homogénea.*

$$g = \frac{x_1}{x_1 - t}\left(z_0 + x_1 \,.\, z_1 + x_1^{\,2} \,.\, z_2 + x_1^{\,3} \,.\, z_3 + \ldots + x_1^{\,m-1} \,.\, z_{m-1}\right)^2 +$$

$$+ \frac{x_2}{x_2 - t} \,.\left(z_0 + x_2 \,.\, z_1 + x_2^{\,2} \,.\, z_2 + x_2^{\,3} \,.\, z_3 + \ldots + x_2^{\,m-1} \,.\, z_{m-1}\right)^2 +$$

....

$$+ \frac{x_m}{x_m - t}\left(z_0 + x_m \,.\, z_1 + x_m^{\,2} \,.\, z_2 + x_m^{\,3} \,.\, z_3 + \ldots + x_m^{\,m-1} \,.\, z_{m-1}\right)^2$$

de m variables z_0, z_1, $z_2 \ldots\ldots z_{m-1}$ y con una indeterminada real t. Reduciendo por una sustitución real la función g á una suma de cuadrados de funciones lineales reales, tendremos:

1.° *Si t es una cantidad positiva real, el número de cuadrados negativos que posee la función g es igual al número de pares de raíces imaginarias conjugadas, más el número de raíces positivas y menores que t de la ecuación $F(z) = 0$.*

2.° *Si t es cantidad real negativa, el número de cuadrados negativos que contiene g, será igual al número de raíces imaginarias conjugadas aumentado en la totalidad de raíces negativas y mayores que t de la ecuación dada.* (Corral.)

Si hacemos

$$X_0 = z_0 + z_1 \,.\, x_1 + z_2 \,.\, x_1^{\,2} + z_3 \,.\, x_1^{\,3} + \ldots\ldots + z_{m-1} \,.\, x_1^{\,m-1}$$

$$X_1 = z_0 + z_1 \,.\, x_2 + z_2 \,.\, x_2^{\,2} + z_3 \,.\, x_2^{\,3} + \ldots\ldots + z_{m-1} \,.\, x_2^{\,m-1}$$

....

....

$$X_{m-1} = z_0 + z_1 . x_m + z_2 . x_m^2 + z_3 . x_m^3 + \ldots\ldots + z_{m-1} . x_m^{m-1}$$

la función tomará la forma

$$g = \frac{x_1}{x_1 - t} . X_0^2 + \frac{x_2}{x_2 - t} . X_1^2 + \frac{x_3}{x_3 - t} . X_2^2 + \ldots + \frac{x_m}{x_m - t} . X^2_{m-1}$$

Existiendo una raíz x_1 imaginaria, la función g tendrá también su conjugada x_2; resultará entonces que X_0 y X_1 serán cantidades imaginarias conjugadas, por lo cual

$$X_0 . \sqrt{\frac{x_1}{x_1 - t}} = u + v . \sqrt{-1}$$

$$X_1 . \sqrt{\frac{x_2}{x_2 - t}} = u - v . \sqrt{-1}$$

de modo que

$$X_0^2 . \frac{x_1}{x_1 - t} + X_1^2 . \frac{x_2}{x_2 - t} = u^2 - v^2$$

y la función g tendrá un cuadrado positivo y otro negativo.

Supongamos ahora:

1.° $t > 0$. La raíz real x_μ puede ser

$$x_\mu > 0 \qquad\qquad x_\mu > t$$

y entonces la cantidad

$$X_\mu^2 . \frac{x_\mu}{x_\mu - t} \tag{c}$$

será positiva en vista de que X_μ^2 es mayor que cero, desde el momento que X_μ es real.

Si fuese

$$x_\mu > 0 \qquad\qquad x_\mu < t$$

dicha misma cantidad será negativa.

Finalmente, si $x_\mu < 0$, entonces

$$X_\mu^2 . \frac{x_\mu}{x_\mu - t}$$

será positivo.

2.° $t < 0$. Caso de que la raíz real x_μ sea mayor que cero, la cantidad (c) será positiva; si fuese

$$x_\mu < 0 \qquad\qquad x_\mu < t$$

entonces (c) valdrá más que cero; por último, cuando

$$x_\mu < 0 \qquad\qquad x_\mu > t$$

el producto (c) será negativo.

Estas consideraciones nos demuestran el teorema, ya que x_μ representa una raíz real cualquiera de $F(z) = 0$.

Teorema II.—*Si* α *y* β *son dos números cualesquiera y en la función g sustituímos primero en vez de t la cantidad* α *y luego el número* β, *la diferencia entre el número de cuadrados negativos que sucesivamente presenta g para* $t = \alpha$ *y cuando* $t = \beta$, *es igual á la diferencia entre el número de raíces negativas y positivas de* $F(z)$ *comprendidas entre los límites dados* α *y* β. (Corral.)

Supongamos para mayor claridad los casos siguientes:

Primer caso.—Tenemos simultáneamente

$$\alpha > 0 \qquad\qquad \beta > 0 \qquad\qquad \beta > \alpha$$

Llamemos por N_α el número de cuadrados negativos que la función g presenta para $t = \alpha$: así como por N_β la cantidad análoga cuando $t = \beta$.

Sean p_α el número de raíces positivas de $F(z) = 0$ menores que α;

p_β » » » $F(z) = 0$ » » β

p' » » » $F(z) = 0$ comprendidas entre α y β.

De acuerdo con el teorema anterior, si llamamos I el número de pares de raíces imaginarias de $F(z) = 0$, tendremos

$$N_\alpha = I + p_\alpha$$

$$N_\beta = I + p_\beta$$

y como evidentemente

$$p_\beta - p_\alpha = p'$$

nos resultará

$$N_\beta - N_\alpha = p' \text{ ó bien } N_\alpha - N_\beta = \quad p' \qquad (c \ a \ e).$$

Segundo caso.— Hacemos al mismo tiempo

$$\alpha < 0 \qquad \beta < 0 \qquad \alpha < \beta$$

Designando por

n_α el número de raíces negativas de $F(z) = 0$ mayores que α

n_β » » » $F(z) = 0$ » » β

n' » » » $F(z) = 0$ comprendidas entre α y β.

Aplicando el teorema anterior vemos que

$$N_\alpha = I + n_\alpha$$

$$N_\beta = I + n_\beta$$

pero siendo por hipótesis

$$n' = n_\alpha - n_\beta$$

estableceremos definitivamente

$$N_\alpha - N_\beta = n' \qquad (c.a.e).$$

Tercer caso.—Sean, en fin, dos números cualesquiera

$$\alpha < 0 \qquad \beta > 0$$

Llamando

n el número de raíces negativas de $F(z) = 0$ comprendidas entre α y β.

p el número de raíces positivas de $F(z) = 0$ comprendidas entre α y β.

tendremos, como consecuencia de los dos casos anteriores:

$$N_\alpha - N_0 = n$$

$$- N_\beta + N_0 = - p$$

en donde N_0 representa el número de cuadrados negativos que la función g tiene cuando $t = 0$. Así pues

$$N_\alpha - N_\beta = n - p$$

de conformidad al enunciado establecido.

El teorema I del § 21 puede considerarse como un corolario de la proposición presente.

Hemos demostrado (teorema I, § 27) que cuando no se considera más que los signos de las funciones

$$W \qquad W_1 \qquad W_2 \ldots\ldots W_m$$

se puede poner

$$W = (x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_m)$$
$$W_1 = \Sigma\,(-1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)\ldots\ldots(x - x_m)\cdot x_1$$
$$W_2 = \Sigma\,(-1)^2\cdot(x_1 - x_2)^2\cdot(x - x_3)\cdot(x - x_4)\ldots(x - x_m)\cdot x_1\cdot x_2$$
$$W_3 = \Sigma\,(-1)^3\cdot(x_1 - x_2)^2\cdot(x_1 - x_3)^2\cdot(x_2 - x_3)^2\cdot(x - x_4)\cdot(x - x_5)\ \cdot(x - x_m)\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3$$

. . . .

. . . .

$$W_m = (-1)^m\cdot(x_1 - x_2)^2\ldots(x_1 - x_m)^2\cdot(x_2 - x_3)^2\ldots(x_{m-1} - x_m)^2\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots x_m$$

ya que las cantidades $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots \lambda_m$ son todas positivas.

Sabemos también que

$$g = \nabla_0\cdot X_0^{\,2} + \frac{\nabla_1}{\nabla_0}\cdot X_1^{\,2} + \frac{\nabla_2}{\nabla_1}\cdot X_2^{\,2} + \ldots\ldots + \frac{\nabla_{m-1}}{\nabla_{m-2}}\cdot X_m^{\,2}$$

en donde

$$\nabla_0 = \Sigma\,(-1)\cdot\frac{x_1}{x - x_1} \qquad \nabla_1 = \Sigma\,(-1)^2\cdot x_1\cdot x_2\cdot\frac{(x_1 - x_2)^2}{(x - x_1)\cdot(x - x_2)}$$

$$\nabla_2 = \Sigma\,(-1)^3\cdot x_1\cdot x_2\cdot x_3\cdot\frac{(x_1 - x_2)^2\cdot(x_1 - x_3)^2\cdot(x_2 - x_3)^2}{(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdot(x - x_3)} \ldots\ldots$$

En virtud de estas igualdades, se deduce inmediatamente

$$\nabla_0 = \frac{W_1}{W} \qquad \frac{\nabla_1}{\nabla_0} = \frac{\nabla_1\cdot W}{\nabla_0\cdot W} = \frac{W_2}{W_1}$$

$$\frac{\nabla_2}{\nabla_1} = \frac{\nabla_2\cdot W}{\nabla_1\cdot W} = \frac{W_3}{W_1} \qquad \frac{\nabla_3}{\nabla_2} = \frac{\nabla_3\cdot W}{\nabla_2\cdot W} = \frac{W_4}{W_3} \ldots\ldots$$

por lo cual, el número de cuadrados negativos de la función g, ó sea el total de términos negativos de la serie

$$\Upsilon_0 \, , \ \frac{\Upsilon_1}{\Upsilon_0} \, , \ \frac{\Upsilon_2}{\Upsilon_1} \ldots \ldots \frac{\Upsilon_{m-1}}{\Upsilon_{m-2}}$$

será también el conjunto de cantidades menores de cero presentada por la serie

$$\frac{W_1}{W} \quad \frac{W_2}{W_1} \quad \frac{W_3}{W_2} \ldots \ldots \frac{W_m}{W_{m-1}}$$

que es igual al número de variaciones de

(1) $$W \quad W_1 \quad W_2 \ldots \ldots W_{m-1} \quad W_m$$

De aquí resulta que el número de cuadrados negativos perdidos en g al pasar de $t = \alpha$ á $t = \beta$ ó sea el total de variaciones perdidas en nuestra serie (1) durante el mismo intervalo, será igual á la diferencia entre los números de raíces negativas y positivas que $F(z) = 0$ tiene en el espacio α, β. Precisamente el teorema I del § 21.

Veamos ahora el método práctico para determinar el número N de cuadrados negativos de la función g.

Sea la ecuación dada

$$F(z) = z^m + a_1 . z^{m-1} + a_2 . z^{m-2} + \ldots \ldots + a_{m-1} . z + a_m$$

de raíces $x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_m$. Hagamos

$$\varphi(z) = z_0 + z_1 . z + z_2 . z^2 + z_3 . z^3 + \ldots \ldots + z_{m-1} . z^{m-1}$$

por lo cual la función g tomará la forma

(4) $$g = \frac{x_1}{x_1 - t} . \varphi^2(x_1) + \frac{x_2}{x_2 - t} . \varphi^2(x_2) + \frac{x_3}{x_3 - t} . \varphi^2(x_3) + \\ + \ldots \ldots + \frac{x_m}{x_m - t} . \varphi^2(x_m)$$

Llamemos $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots \ldots Z_{m-1}$ nuevas indeterminadas, enlazadas por la relación

$$\Phi(z) = Z_0 + z . Z_1 + z^2 . Z_2 + z^3 . Z_3 + \ldots \ldots + z^{m-1} . Z_{m-1}$$

Realizaremos una sustitución definida por la igualdad

(5) $$\varphi(z) = (z - t) . \Phi(z) - Z_{m-1} . F(z)$$

que habrá de convertirse en identidad relativamente á la variable z. Sustituyendo en la misma en vez de z las raíces $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ de $F(z) = 0$ tendremos

$$\begin{array}{l} \varphi(x_1) = (x_1 - t) \cdot \Phi(x_1) \\ \varphi(x_2) = (x_2 - t) \cdot \Phi(x_2) \\ \varphi(x_3) = (x_3 - t) \cdot \Phi(x_3) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi(x_m) = (x_m - t) \cdot \Phi(x_m) \end{array}$$

Por medio de la sustitución (5) la función (4) se transforma en una nueva función C de las variables $Z_0, Z_1, Z_2 \ldots\ldots Z_{m-1}$; así tendremos

$$\textbf{(6)}\quad C = x_1(x_1 - t) \cdot \Phi^2(x_1) + x_2(x_2 - t) \cdot \Phi^2(x_2) + \ldots + x_m\ (x_m - t) \cdot \Phi^2(x_m)$$

Llamando por $n_0\ n_1\ n_2 \ldots\ldots n_{m-1}$ nuevas variables ligadas con las $Z_0\ Z_1\ Z_2 \ldots\ldots Z_{m-1}$ por medio de las ecuaciones

$$\textbf{(7)}\quad \left\{\begin{array}{l} Z_0 = n_{m-1} + a_1 \cdot n_{m-2} + a_2 \cdot n_{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-1} \cdot n_0 \\ Z_1 = n_{m-2} + a_1 \cdot n_{m-3} + a_2 \cdot n_{m-4} + \ldots\ldots + a_{m-2} \cdot n_0 \\ Z_2 = n_{m-3} + a_1 \cdot n_{m-4} + a_2 \cdot n_{m-5} + \ldots\ldots + a_{m-3} \cdot n_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_{m-2} = n_1 + a_1 \cdot n_0 \\ Z_{m-1} = n_0 \end{array}\right.$$

El cociente de $F(n)$ por $n - x_\mu$ vale

$$\begin{array}{l|l|l|l} n^{m-1} + a_1 & n^{m-2} + a_2 & n^{m-3} + \ldots\ldots + a_{m-1} & n^0 \\ \quad + x_\mu & \quad + a_1 \cdot x_\mu & \quad\quad + a_{m-2} \cdot x_\mu & \\ & \quad + x_\mu^2 & \quad\quad + a_{m-3} \cdot x_\mu^2 & \\ & & \quad\quad \vdots & \\ & & \quad\quad + x_\mu^{m-1} & \end{array}$$

así es que sustituyendo n^p por n_p ó sea los exponentes de n por subíndices del mismo número, este cociente será

$$Z_1 + x_\mu \cdot Z_1 + x_\mu^2 \cdot Z_2 + \ldots\ldots + x_\mu^{m-1} Z_{m-1}$$

que es igual á

$\Phi(x_\mu)$.

Será posible, pues, escribir

$$\Phi(x_1) = \frac{F(n)}{n - x_1}, \quad \Phi(x_2) = \frac{F(n)}{n - x_2}, \quad \Phi(x_3) = \frac{F(n)}{n - x_3} \;\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots \Phi(x_m) = \frac{F(n)}{n - x_m}$$

siempre que al efectuar las divisiones indicadas se conviertan las potencias $n^0, n^1, n^2, n^3 \ldots\ldots n^{m-1}$ en las variables $n_0, n_1, n_2 \ldots\ldots n_{m-1}$ definidas por el sistema de ecuaciones (7).

Análogamente estableceremos

$$\Phi^2(x_\mu) = \frac{F(n)}{n - x_\mu} \cdot \frac{F(n')}{n' - x_\mu}$$

si al realizar las dos divisiones se toma la precaución de reemplazar n^j y n'^j por n_j.

La nueva función C definida por (6) se convertirá en

$$C = \Sigma\, x_1 \cdot (x_1 - t) \cdot \frac{F(n)}{n - x_1} \cdot \frac{F(n')}{n' - x_1}$$

el signo Σ extendiéndose á todas las raíces $x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_m$ de $F(z) = 0$.

Puede darse á C otra forma más sencilla por medio de las operaciones siguientes:

$$C = F(n) \cdot F(n') \cdot \Sigma \frac{x_1 \cdot (x_1 - t)}{(n - x_1) \cdot (n' - x_1)} =$$

$$= F(n') \cdot F(n) \cdot \Sigma \frac{x_1}{n - n'} \left(\frac{t - n}{n - x_1} - \frac{t - n'}{n' - x_1} \right) =$$

$$= \frac{F(n) \cdot F(n')}{n - n'} \left[\Sigma \frac{x_1 \cdot (t - n)}{n - x_1} \quad \Sigma \frac{x_1 \cdot (t - n')}{n' - x_1} \right]$$

Ahora bien

$$\Sigma \frac{x_1 (t - n)}{n - x_1} = (t - n) \cdot \Sigma \frac{x_1}{n - x_1} = -(t - n) \cdot \frac{E_1 F(n)}{F(n)}$$

$$\Sigma \frac{x_1 \cdot (t - n')}{n' - x_1} = (t - n') \cdot \Sigma \frac{x_1}{n' - x_1} = -(t - n') \cdot \frac{E_1 F(n')}{F(n')}$$

razón por la cual

$$C = \frac{F(n) \cdot F(n')}{n - n'} \left[(t - n') \cdot \frac{E_1 F(n')}{F(n')} - (t - n) \cdot \frac{E_1 F(n)}{F(n)} \right] =$$

$$= \frac{(t - n') \cdot E_1 F(n') \cdot F(n) - (t - n) \cdot F(n') \cdot E_1 F(n)}{n - n'} \qquad \textbf{(8)}$$

forma definitiva de gran utilidad en las aplicaciones.

El segundo miembro de la fórmula (8) es una función entera de las variables n y n', y en la que una vez ordenada con relacion á ellas, será preciso sustituir las potencias n^j y n'^j por n_j y n_j respectivamente. Obtendremos así una función homogénea C que se convertirá, por métodos conocidos, á una suma de cuadrados. El número de estos afectados de coeficientes negativos será igual á N.

Cuando se quiera tener el número de raíces de $F(z) = 0$ comprendidas entre dos límites α, β dados, será más conveniente para obtener los valores N_α, N_β operar desde luego sobre las dos expresiones

$$C_\alpha = \frac{(\alpha - n') \cdot F(n) \cdot E_1 F_1(n') - (\alpha - n) \cdot F(n') \cdot E_1 F(n)}{n - n'}$$

$$C_\beta = \frac{(\beta - n') \cdot F(n) \cdot E_1 F(n') - (\beta - n) \cdot F(n') \cdot E_1 F(n)}{n - n'}$$

cuyos coeficientes son todos numéricos.

Aplicación.— Para aclarar las ideas y penetrarse de la brevedad del presente método, vamos á deducir el número de raíces reales de la ecuación

$$z^3 - 3 \cdot z + 1 = 0$$

así como los límites entre los cuales se encuentran comprendidas.

Tenemos en este caso

$$F(n) = n^3 - 3\,n + 1$$
$$F(n') = n'^3 - 3\,n' + 1$$
$$E_1 F(n) = -\,6\,n + 3 \text{ ó bien } -\,2\,n + 1 \text{ prescindiendo del factor 3}$$
$$E_1 F(n') = -\,6\,n' + 3 \text{ ó bien } -\,2\,n' + 1 \text{ prescindiendo del factor 3}$$

luego aplicando la fórmula (8)

$$C = \frac{(t-n').(n^3-3n+1).(-2n'+1)-(t-n).(n'^3-3n'+1).(-2n+1)}{n-n'}$$

donde realizando las operaciones indicadas resultará

$$C = -2t.n.n'\cdot(n+n') + 2.t + 2.n^2.n'^2 + 6.n\ n' - 2(n+n') +$$
$$+ t(n^2 + n\,n' + n'^2) - 3t - n\,n'(n+n') + 1$$

Sustituyendo ahora las potencias de n y n' por las variables $n_0 . n_1 . n_2 \ldots\ldots$ la función C tomará su forma definitiva.

$$C = t(-n_0^2 - 4n_1 n_2 + 2n_0 . n_2 + n_1^2) + 2n_2^2 + 6n_1^2 -$$
$$- 4n_1 . n_0 - 2n_1 n_2 + n_0^2$$

esencialmente distinta de la función $\mathfrak{F}$ definida por Hermite. [Véase Serret, tomo I, pág. 597, el valor que en este caso tiene $\mathfrak{F}$].

Si ahora hacemos $t = 0$, se obtendrá

$$C_0 = 2n_2^2 + 6n_1^2 - 4_1 n_1 n_0 - 2n_1 n_2 + n_0^2$$

que puede transformarse en una suma de cuadrados, convirtiéndose en

$$C_0 = (n_0 - 2n_1)^2 + \frac{3}{2}n_1^2 + \left(\sqrt{2}\cdot n_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot n_1\right)^2$$

Como no existe en C_0 ningún cuadrado negativo, resultará

$$N_0 = 0$$

Haciendo en C á la indeterminada t igual á 1, tendremos

$$C_1 = -6n_1 n_2 + 2n_0 n_2 + 7n_1^2 + 2n_2^2 - 4n_1 n_0$$

lo que podrá ponerse bajo la siguiente forma

$$C_1 = (2n_1 - n_0)^2 + (\sqrt{3}.n_1 - \sqrt{3}.n_2)^2 - (n_0 - n_2)^2$$

en la cual existe un solo cuadrado de coeficiente negativo; por lo que

$$N_1 = 1$$

De aquí resultará

$$N_1 - N_0 = 1$$

que demuestra la existencia de una raíz real de la ecuación dada entre los números 0 y 1.

Cuando t crece indefinidamente, el valor de C dividido por t se reduce al coeficiente de su primer término, ó sea el polinomio

$$- n_0^2 - 4\, n_1 \,.\, n_2 + 2\, n_0 \,.\, n_2 + n_1^2$$

que puede adoptar la forma

$$- (n_0 - n_2)^2 - 3\, n_2^2 + (n_1 - 2\, n_2)^2$$

en la cual hay dos cuadrados de coeficiente negativo, luego

$$N_\infty = 2$$

Este valor nos demuestra que existe en la ecuación estudiada una raíz entre 1 y $+\infty$.

Convirtiendo t en $-t$, se tendrá para valores de t próximos á $-\infty$ que $\frac{C}{t}$ vale

$$+ (n_0 - n_2)^2 + 3\, n_2^2 - (n_1 - 2\, n_2)^2$$

luego

$$N_{-\infty} = 1$$

de donde

$$N_{-\infty} - N_0 = 1$$

es decir, que la ecuación dada tiene una raíz real negativa.

Otro ejemplo.—Consideremos ahora la ecuación

$$z^3 - 7\, z - 7 = 0$$

cuyo número de raíces positivas, negativas ó imaginarias se desea averiguar.

Tenemos aquí

$$F(n) = n^3 - 7 \,.\, n - 7$$
$$F(n') = n'^3 - 7 \,.\, n' - 7$$

$$E_1 F(n) = -14 \cdot n - 21$$
$$E_1 F(n') = -14 \cdot n' - 21$$

por lo que la fórmula (8) dará

$$C = \frac{(t-n').(-14.n'-21).(n^3-7.n-7)-(t-n).(-14.n-21)(n'^3-7n'-7)}{n-n'}$$

Realizando todas las operaciones indicadas obtendremos

$$C = -14 \cdot t \cdot n \cdot n' \cdot (n + n') + 49 \cdot t - 21 \cdot t \cdot (n^2 + n \cdot n' + n'^2) +$$
$$+ 14 \cdot n^2 \cdot n'^2 + 98 \cdot n \cdot n' + 98 \cdot (n + n') + 21 \cdot n \cdot n' \cdot (n + n') + 147$$

Si sustituímos n^p y n'^p por n_p se llegará al siguiente valor

$$C = t \cdot [-28 \cdot n_1 \cdot n_2 + 49 \cdot n_0^2 - 42 \cdot n_0 \cdot n_2 - 21 \cdot n_1^2] + 14 \cdot n_2^2 +$$
$$+ 98 \cdot n_1^2 + 196 \cdot n_1 \cdot n_0 + 147 \cdot n_0^2 + 42 \cdot n_1 \cdot n_2$$

Haciendo $t = 0$ se tendrá

$$C_0 = 14\, n_2^2 + 98 \cdot n_1^2 + 196 \cdot n_1 \cdot n_0 + 147 \cdot n_0^2 + 42\, n_1 \cdot n_2$$

forma cuadrática que puede descomponerse del siguiente modo

$$3 \cdot C_0 = (21 \cdot n_0 + 14 \cdot n_1)^2 + \left(\sqrt{42} \cdot n_2 + \frac{63}{\sqrt{42}} \cdot n_1\right)^2 + 3,5 \cdot n_1^2$$

que indica la no existencia de cuadrados negativos, por lo que

$$N_0 = 0$$

Cuando t vaya creciendo positivamente, el valor de C tiende á valer el coeficiente de su primer término, de tal modo que, para $t = +\infty$, tendremos

$$C_{+\infty} = -28\, n_1 \cdot n_2 + 49 \cdot n_0^2 - 42 \cdot n_0 \cdot n_2 - 21 \cdot n_1^2$$

ó bien

$$C_{+\infty} = (7 \cdot n_0 - 3 \cdot n_2)^2 - \left(\sqrt{21} \cdot n_1 - \frac{14}{\sqrt{21}} \cdot n_2\right)^2 + \frac{1}{3} \cdot n_2^2$$

de donde se deduce

$$N_{+\infty} = 1$$

La ecuación tendrá pues

$$N_{+\infty} - N_0 = 1$$

una raíz real positiva.

Para $t = -\infty$ se establece inmediatamente

$$C_{-\infty} = \left(\sqrt{21} \cdot n_1 - \frac{14}{\sqrt{21}} \cdot n_2\right)^2 - (7 \cdot n_0 - 3 \cdot n_2)^2 - \frac{1}{3} n_2^2$$

por lo cual

$$N_{-\infty} = 2$$

siendo entonces

$$N_{-\infty} - N_0 = 2$$

lo que demuestra la existencia de dos raíces reales negativas.

§ 28.—Otra exposición y demostración del método precedente.

Sea la ecuación dada

(1) $$f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} \cdot x + a_m = 0$$

cuyas raíces designamos por $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$.

Consideremos las funciones

$$f_{m-1}(x) \qquad f_{m-2}(x) \qquad f_{m-3}(x) \ldots\ldots f_1(x) \qquad f_0(x)$$

ya definidas en el § 11, y hagamos

(2) $$y = t_{m-1} \cdot f_0(x) + t_{m-2} \cdot f_1(x) + t_{m-3} \cdot f_2(x) + \ldots\ldots + t_0 \cdot f_{m-1}(x)$$

siendo $t_0\ t_1\ t_2\ \ldots\ldots t_{m-1}$, m indeterminadas.

Suponiendo que las raíces de $f(x) = 0$ sean distintas, formaremos la función

(3) $$C_\alpha = (x_1 - \alpha) \cdot x_1 \cdot y_1^2 + (x_2 - \alpha) \cdot x_2 \cdot y_2^2 + \ldots\ldots + (x_m - \alpha) \cdot x_m \cdot y_m^2$$

que será una forma cuadrática con relación á las indeterminadas anteriores, y en donde se tiene, que $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_m$ representan los valores de y cuando en vez de x ponemos sucesivamente $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$; así

$$y_\mu = t_{m-1} \cdot f_0(x_\mu) + t_{m-2} \cdot f_1(x_\mu) + \ldots\ldots + t_0\ f_{m-1}(x_\mu).$$

La letra α representa una cantidad real cualquiera.

Investiguemos ahora el signo de los diversos términos de C_α. Si x_1 y x_2 son dos raíces imaginarias conjugadas, también lo serán y_1 é y_2 así como $(x_1 - \alpha)$ y $(x_2 - \alpha)$; luego podremos hacer

$$y_1 \cdot \sqrt{x_1 \cdot (x_1 - \alpha)} = u + \sqrt{-1} \cdot v$$

$$y_2 \cdot \sqrt{x_2 \cdot (x_2 - \alpha)} = u - \sqrt{-1} \cdot v$$

lo que demuestra la existencia en C_α de un cuadrado positivo y de otro negativo por cada par de raíces imaginarias de $f(x) = 0$.

De ser x_μ una cantidad real, pueden ocurrir los casos siguientes

1.° *Que* $\alpha > 0$. Entonces si x_μ es positivo y menor que α, el producto $(x_\mu - \alpha) \cdot x_\mu \, y_\mu^2$ será negativo, pues y_μ es una cantidad real.

Si fuese x_μ positivo y mayor que α también resultaría positivo $(x_\mu - \alpha)\, x_\mu \cdot y_\mu^2$. Finalmente, cuando x_μ sea raíz negativa el mencionado producto tomará un valor mayor que cero.

2.° *Que* $\alpha < 0$. Caso de que $x_\mu > 0$ también resultará

$$(x_\mu - \alpha) \cdot x_\mu \cdot y_\mu^2 > 0$$

Si x_μ fuese negativo y menor que α, la cantidad considerada como término de C_α será positiva. Por último, cuando

$$x_\mu < 0 \qquad\qquad x_\mu > \alpha$$

el producto $(x_\mu - \alpha) \cdot x_\mu \cdot y_\mu^2$ tomará signo negativo.

En virtud de estas consideraciones podemos deducir:

I.—*Si* $\alpha < \beta$ *son dos cantidades positivas, el número de raíces reales de* $f(x) = 0$ *comprendidas entre* α *y* β *es igual á* $N_\beta - N_\alpha$, *diferencia entre los cuadrados negativos que respectivamente presentan* C_β *y* C_α. (Corral.)

II.—*Si* $\alpha < \beta$ *son dos límites negativos, el número de raíces reales de* $f(x) = 0$ *comprendidas entre* α *y* β *es igual á* $N_\alpha - N_\beta$, *diferencia entre los números de cuadrados negativos que tienen respectivamente* C_α *y* C_β. (Corral.)

Cuando ocurra el primer caso, N_β es, según ya se ha visto, la suma del número de raíces imaginarias dividido por dos, mas la totalidad de raíces positivas menores que β; idéntica significación

tiene N_α, por lo cual $N_\beta - N_\alpha$ representará el número de raíces positivas de $f(x) = 0$ comprendidas entre α y β.

En el segundo caso ($\alpha < 0$, $\beta < 0$) N_α vale el número de pares de raíces imaginarias aumentado en el número de raíces negativas mayores que α; como análogamente N_β posee idéntico valor, resultará que $N_\alpha - N_\beta$ es la totalidad de raíces negativas de $f(x) = 0$ comprendidas en el intervalo α, β.

El poblema queda reducido á calcular la función C_α del modo más sencillo posible. A tal fin sabemos que

(4)
$$(x - \alpha) . y . f_s = (\varepsilon_{-1.s} - \alpha \varepsilon_{0.s}) . f_0 + (\varepsilon_{0.s} - \alpha . \varepsilon_{1.s}) . f_1 + \\ + \ldots\ldots + (\varepsilon_{m-2.s} - \alpha . \varepsilon_{m-1.s}) . f_{m-1}$$

estando definidos los coeficientes

$$\varepsilon_{-1.s},\ \varepsilon_{0.s},\ \varepsilon_{1.s} \ldots\ldots \varepsilon_{m-1.s}$$

por medio de las ecuaciones siguientes

(5)
$$\left\{\begin{array}{l}
\varepsilon_{-1.s} = -a_{s+1} . t_{m-s} - a_{s+2} . t_{m-2} - \ldots\ldots - a_m . t_s = a_0 . t_{m+s} + \\
\qquad + a_1\, t_{m+s-1} + \ldots\ldots + a_s . t_m \\
\varepsilon_{0.s} = -a_{s+1} . t_{m-2} - a_{s+2} . t_{m-3} - \ldots\ldots - a_m . t_{s-1} = a_0 . t_{m+s} + \\
\qquad + a_1 . t_{m+s-1} + \ldots\ldots + a_s . t_m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_{s-1.s} = -a_{s+1} . t_{m+s-1} - a_{s+2} . t_{m+s-2} - \ldots\ldots - a_m . t_0 = \\
\qquad = a_0 . t_m + a_1 . t_{m-1} + \ldots\ldots + a_s . t_{m-s} \\
\varepsilon_{s.s} = \ldots\ldots\ldots = a_0 . t_{m-1} + a_1 . t_{m-2} + \ldots\ldots + a_s . t_{m-s-1} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varepsilon_{m-1.s} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = a_0 . t_s + a_1 . t_{s-1} + \ldots\ldots + a_s . t_0
\end{array}\right.$$

mientras que las nuevas variables $t_m, t_{m+1} \ldots\ldots t_{m+s}$ se hallan enlazadas por la relación

(6)
$$a_0 . t_{m+s} + a_1 . t_{m+s-1} + \ldots\ldots + a_m . t_s = 0$$

donde s recibe los valores $0 . 1 . 2 \ldots\ldots m - 1$.

Introduciendo un nuevo sistema de variables $\tau_{m-1}, \tau_{m-2} \ldots\ldots \tau_1, \tau_0$ análogas á las $t_{m-1}, t_{m-2} \ldots\ldots t_0$ de modo que

(7)
$$z = \tau_{m-1} . f_0 + \tau_{m-2} . f_1 + \ldots\ldots + \tau_0 . f_{m-1}$$

se tendrá, multiplicando ambos miembros de (4) por τ_{m-s-1} y después por x,

$$(x-\alpha)\, y . x . \tau_{m-s-1} . f_s = x . f_0 . (\mathcal{E}_{-1.s} \quad \alpha . \mathcal{E}_{0.s}) . \tau_{m-s-1} + \tag{8}$$
$$+ x \; f_1 . (\mathcal{E}_{0.s} - \alpha . \mathcal{E}_{1.s}) . \tau_{m-s-1} + \ldots + \tau_{m-s-1} . f_{m-1} . (\mathcal{E}_{m-2.s} - \alpha \mathcal{E}_{m-1\, s})$$

Dando á s sucesivamente los valores $0 . 1 . 2 \ldots\ldots (m-1)$ y sumando las igualdades (8) resultantes tendremos

$$(x-\alpha) . x . y . z = x . f_0 . \sum_{0.m-1}^{s} (\mathcal{E}_{-1\; s} - \alpha\, \mathcal{E}_{0.s}) . \tau_{m-s-1} + \ldots\ldots +$$
$$+ x . f_{m-1} . \sum_{0.m-1}^{s} (\mathcal{E}_{m-2.s} - \alpha\, \mathcal{E}_{m-1.s}) . \tau_{m-s-1}$$

Si en vez de x se pone $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_m$ y luego son sumados los diferentes resultados parciales obtenidos, tendremos en virtud de las igualdades

$$S\,[x . f_0] = -\, a_1$$
$$S\,[x . f_1] = -\, 2 . a_2$$
$$S\,[x . f_2] = -\, 3 . a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S\,[x . f_{m-1}] = -\, m . a_m$$

la fórmula siguente

$$S\left[(x-\alpha) . x . y . z\right] = a_1 . \sum_{0.m-1}^{s} (\alpha . \mathcal{E}_{2.s} - \mathcal{E}_{1.s}) . \tau_{m--1\, s} + \tag{9}$$
$$+ 2 . a_2 . \sum_{0.m-1}^{s} (\alpha \;\; \mathcal{E}_{1.s} - \mathcal{E}_{0.s}) \;\; \tau_{m-s-1} +$$
$$+ 3 \;\; a_3 . \sum_{0.m-1}^{s} (\alpha . \mathcal{E}_{2.s} - \mathcal{E}_{1.s}) . \tau_{m-s-1} + \ldots . +$$
$$+ m . a_m . \sum_{0.m-1}^{s} (\alpha . \mathcal{E}_{m-1\;\; s} - \mathcal{E}_{m-2.s}) . \tau_{m-s-1}$$

de la cual se obtendrá el valor de C_α haciendo $y = z$, lo que equivale á tener $t = \tau$.

Desarrollamos á continuación el cálculo detallado de C_α cuando $m = 3$.

Tendremos entonces, aplicando las fórmulas (5)

$\mathcal{E}_{-1.0} = -\, a_1\, t_2 - a_2\, t_1 - a_3\, t_0$	$\mathcal{E}_{0.0} = a_0\, t_2$
$\mathcal{E}_{-1.1} = -\, a_2\, t_2 - a_3\, t_1$	$\mathcal{E}_{0.1} = -\, a_2 . t_1 - a_3 . t_0$
$\mathcal{E}_{-1.2} = -\, a_3\, t_2$	$\mathcal{E}_{0.2} = -\, a_3 . t_1$

$$\mathcal{E}_{1\,.\,0} = a_0\, t_1 \qquad \mathcal{E}_{2\,.\,0} = a_0\, t_0$$
$$\mathcal{E}_{1\,.\,1} = -\, a_0\, t_2 + a_1\, t_1 \qquad \mathcal{E}_{2\,.\,1} = a_0\, t_1 + a_1\, t_0$$
$$\mathcal{E}_{1\,.\,2} = -\, a_3\, t_0 \qquad \mathcal{E}_{2\,.\,2} = a_0\, t_2 + a_1\, t_1 + a_2\, t_0$$

Para desarrollar la igualdad (9) prepararemos antes cada uno de sus términos.

Así

$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{0\,.\,0} \cdot \tau_2 = \alpha \,.\, a_0 \cdot t_2 \cdot \tau_2$$
$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{0\,.\,1} \cdot \tau_1 = -\, \alpha \,.\, a_2 \cdot t_1 \,.\, \tau_1 - \alpha \,.\, a_3 \,.\, t_0 \cdot \tau_1$$
$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{0\,.\,2} \cdot \tau_0 = -\, \alpha \,.\, a_3 \,.\, t_1 \cdot \tau_0$$

$$\mathcal{E}_{-1\,.\,0} \cdot \tau_2 = -\, a_1 \,.\, t_2 \,.\, \tau_2 - a_2 \cdot t_1 \cdot \tau_2 - a_3 \cdot t_0 \cdot \tau_2$$
$$\mathcal{E}_{-1\,.\,1} \cdot \tau_1 = -\, a_2 \cdot t_2 \cdot \tau_1 - a_3 \cdot t_1 \cdot \tau_1$$
$$\mathcal{E}_{-1\,.\,2} \cdot \tau_0 = -\, a_3 \cdot t_2 \cdot \tau_0$$

luego haciendo $t = \tau$

$$a_1 \,.\, \sum_{0\,.\,2}^{s} \left(\alpha \,.\, \mathcal{E}_{0\,.\,s} - \mathcal{E}_{-1\,.\,s}\right) \cdot \tau_{3-s-1} = a_1 \Big[\, t_2^2 \left(\alpha \,.\, a_0 + a_1\right) + $$
$$+\, t_1^2 \left(-\, \alpha\, a_2 + a_3\right) - 2\, \alpha \,.\, a_3 \,.\, t_0 \cdot t_1 + 2\, a_2 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2\, a_3 \,.\, t_0 \cdot t_2 \Big]$$

De igual manera

$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{1\,.\,0} \cdot \tau_2 = \alpha \,.\, a_0 \cdot t_1 \,.\, \tau_2$$
$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{1\,.\,1} \cdot \tau_1 = \alpha \,.\, a_0 \cdot t_2 \,.\, \tau_1 + \alpha \,.\, a_1 \cdot t_1 \cdot \tau_1$$
$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{1\,.\,2} \cdot \tau_0 = -\, \alpha \,.\, a_3 \cdot t_0 \,.\, \tau_0$$

$$\mathcal{E}_{0\,.\,0} \cdot \tau_2 = a_0 \cdot t_2 \cdot \tau_2$$
$$\mathcal{E}_{0\,.\,1} \cdot \tau_1 = -\, a_2 \cdot t_1 \,.\, \tau_1 - a_3 \cdot t_0 \,.\, \tau_1$$
$$\mathcal{E}_{0\,.\,2} \cdot \tau_0 = -\, a_3 \cdot t_1 \,.\, \tau_0$$

por lo cual poniendo $t = \tau$

$$2 \cdot a_2 \,.\, \sum_{0\,.\,2}^{s} \left(\alpha\, \mathcal{E}_{1\,.\,s} - \mathcal{E}_{0\,.\,s}\right) \cdot \tau_{3-s-1} = 2\, a_2 \,.\Big[\, t_1^2 \left(\alpha\, a_1 + a_2\right) + 2\, \alpha\, a_0 \cdot t_1\, t_2 -$$
$$-\, \alpha\, a_3 \cdot t_0^2 - a_0 \cdot t_2^2 + 2\, a_3\, t_0\, t_1 \Big]$$

Idénticamente

$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{2\,.\,0} \cdot \tau_2 = \alpha \,.\, a_0 \cdot t_0 \cdot \tau_2$$
$$\alpha \,.\, \mathcal{E}_{2\,.\,1} \cdot \tau_1 = \alpha \,.\, a_0 \cdot t_1 \cdot \tau_1 + \alpha \,.\, a_1\, t_0 \cdot \tau_1$$
$$\alpha\, \mathcal{E}_{2\,.\,2} \cdot \tau_0 = \alpha\, a_0 \cdot t_2 \cdot \tau_0 + \alpha \,.\, a_1 \cdot t_1 \cdot \tau_0 + \alpha\, a_2 \cdot t_0 \cdot \tau_0$$

$$\mathcal{E}_{1.0} \cdot \tau_2 = a_0 \cdot t_1 \cdot \tau_2$$
$$\mathcal{E}_{1.1} \cdot \tau_1 = a_0 \cdot t_2 \cdot \tau_1 + a_1 \cdot t_1 \cdot \tau_1$$
$$\mathcal{E}_{1.2} \cdot \tau_0 = - a_3 \cdot t_0 \cdot \tau_0$$

así es que

$$3 \cdot a_3 \cdot \sum_{0.2}^{s} (\alpha \cdot \mathcal{E}_{2\ s} - \mathcal{E}_{1.s})\, \tau_{3-s-1} = 3 \cdot a_3 \left[t_1^2 (\alpha\, a_0 - a_1) + t_0^2 (\alpha\, a_2 + a_3) + \right.$$
$$\left. + 2 \cdot \alpha \cdot a_0 \cdot t_0 \cdot t_2 + 2\, \alpha \cdot a_1\, t_0\, t_1 - 2\, a_0 \cdot t_1 \cdot t_2 \right]$$

Resultará por tanto

$$C\alpha = t_0^2 \cdot C_{0.0} + t_1^2 \cdot C_{1.1} + t_2^2 \cdot C_{2.2} + t_0 \cdot t_1 \cdot C_{0.1} + t_0 \cdot t_2 \cdot C_{0.2} +$$
$$+ t_1 \cdot t_2 \cdot C_{1.2}$$

en donde

$$C_{0.0} = a_3 (\alpha\, a_2 + 3 \cdot a_3)$$
$$C_{1.1} = 2 \cdot a_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot a_3 + \alpha \cdot (a_1 \cdot a_2 + 3 \cdot a_0 \cdot a_3)$$
$$C_{2.2} = (\alpha \cdot a_0 + a_1) \cdot a_1 - 2 \cdot a_0 \cdot a_2$$
$$C_{0.1} = 4\, a_3 (\alpha \cdot a_1 + a_2)$$
$$C_{0.2} = 2 \cdot a_3 \cdot (a_1 + 3 \cdot \alpha\, a_0)$$
$$C_{1.2} = a_0 (4\, a_2 \cdot \alpha - 6 \cdot a_3) + 2\, a_1\, a_2$$

La función C_α que hemos definido, es completamente distinta, según ya probamos en el número anterior, á la forma cuadrática de Hermite. En este caso concreto se evidencia tal aserto, comparando los valores $C_{a\ b}$ aquí encontrados con los $H_{a.b}$ que en el *Álgebra superior* de Weber (edición francesa) aparecen en la página 381.

Según la teoría general de las formas cuadráticas [Weber, páginas 298 á 311] para conocer el número de cuadrados negativos de nuestra función C_α es necesario calcular su discriminante.

Llamando en

$$C = \sum_{0\ m-1}^{i} \sum_{0\ m-1}^{k} C_{i.k}\, t_i \cdot \tau_k = S\left[(x - \alpha) \cdot x \cdot y\, z \right]$$

por $C_{i.k}$ al coeficiente de $t_i \cdot \tau_k$, es fácil ver que

$$C_{i.k} = S\left[(x - \alpha) \cdot x \cdot f_{m-i-1} \cdot f_{m-k-1} \right]$$

luego el discriminante ∇ buscado, valdrá

$$\nabla = \begin{vmatrix} (x_1 - \alpha)\, x_1 \cdot f_0(x_1) & x_1 (x_1 - \alpha) \cdot f_1(x_1) \ldots\ldots & x_1 \cdot (x_1 - \alpha) \cdot f_{m-1}(x_1) \\ (x_2 - \alpha) \cdot x_2 \cdot f_0(x_2) & x_2 \cdot (x_2 - \alpha) \cdot f_1(x_2) \ldots\ldots & x_2 \cdot (x_2 - \alpha) \cdot f_{m-1}(x_2) \\ (x_3 - \alpha) \cdot x_3 \cdot f_0(x_3) & x_3 \cdot (x_3 - \alpha) \cdot f_1(x_3) \ldots\ldots & x_3 \cdot (x_3 - \alpha)\, f_{m-1}(x_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (x_m - \alpha)\, x_m \cdot f_0(x_m) & x_m (x_m - \alpha) \cdot f_1(x_m) \ldots\ldots & x_m \cdot (x_m - \alpha) \cdot f_{m-1}(x_m) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \ldots\ldots f_{m-1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \ldots\ldots f_{m-1}(x_2) \\ f_0(x_3) & f_1(x_3) & f_2(x_3) \ldots\ldots f_{m-1}(x_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(x_m) & f_1(x_m) & f_2(x_m) \ldots\ f_{m-1}(x_m) \end{vmatrix}$$

y como

$$a_0 \cdot (x_1 - \alpha) \cdot (x_2 - \alpha) \cdot (x_3 - \alpha) \ldots\ldots (x_m - \alpha) = (-1)^m \cdot f(\alpha)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots\ldots x_m = (-1)^m \cdot \frac{a_m}{a_0}$$

tendremos entonces

$$\nabla = a_m \cdot \frac{f(\alpha)}{a_0^2} \cdot \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \ldots\ f_{m-1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \ldots\ldots f_{m-1}(x_2) \\ f_0(x_3) & f_1(x_3) & f_2(x_3) \ldots\ldots f_{m-1}(x_3) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_0(x_m) & f_1(x_m) & f_2(x_m) \ldots\ldots f_{m-1}(x_m) \end{vmatrix}^2$$

Este último determinante es igual al producto

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} \ldots a_0 \end{vmatrix}^2 \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{m-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots x_2^{m-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 \ldots\ldots x_3^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 1 & x_m & x_m^2 \ldots\ldots x_m^{m-1} \end{vmatrix}^2$$

cuyo primer factor vale a_0^{2m}, mientras que el segundo es igual á $\frac{D}{a_0^{2m-2}}$ si designamos por D el discriminante de $f(x)$. Así pues

(10) $$\nabla = a_m \cdot f(\alpha) \cdot D$$

Como las raíces de $f(x) = 0$ son todas diferentes, el discrimi-

nante D no puede anularse; resultará por tanto que ∇ no será igual á cero si elegimos á α con un valor distinto al de las raíces de $f(x) = 0$.

La serie de menores principales de ∇ valdrá

$$\nabla_1(\alpha) \qquad \nabla_2(\alpha) \qquad \nabla_3(\alpha) \ldots\ldots \nabla_m(\alpha) = \nabla$$

comenzando por los de grado inferior.

Según se sabe [Weber, obra citada, página 306] el número de cuadrados negativos N_α de la forma C_α es igual al número de variaciones de la serie

$$1 \qquad \nabla_1(\alpha) \qquad \nabla_2(\alpha) \qquad \nabla_3(\alpha) \ldots\ldots \nabla_m(\alpha)$$

Para deducir N_β habrá que calcular análogamente la serie

$$1 \qquad \nabla_1(\beta) \qquad \nabla_2(\beta) \qquad \nabla_3(\beta) \ldots\ldots \nabla_m(\beta)$$

y su número de variaciones sería N_β.

Apliquemos la presente teoría á la ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -3 \qquad a_3 = 1$$

por lo cual los coeficientes $C_{i\,.\,k}$ de la forma C valdrán

$$\begin{aligned} C_{0\,0} &= 3(1-\alpha) \\ C_{1\,1} &= 3\,\alpha + 18 \\ C_{2\,2} &= 6 \\ C_{0\,1} &= -12 \\ C_{0\,2} &= 6\,.\,\alpha \\ C_{1\,2} &= -12\,.\,\alpha - 6 \end{aligned}$$

siendo por tanto la función C

$$C = \alpha\,.\left(-3\,t_0^2 + 3\,t_1^2 + 6\,t_0 \cdot t_2 - 12\,.\,t_1\,t_2\right) + 3\,t_0^2 + 18\,t_1^2 + \\ + 6\,t_2^2 - 12\,.\,t_0 \cdot t_1 - 6\,.\,t_1 \cdot t_2$$

ó prescindiendo del factor 3

$$C = \alpha\left(-t_0^2 + t_1^2 + 2\,.\,t_0 \cdot t_2 - 4\,.\,t_1 \cdot t_2\right) + t_0^2 + 6\,.\,t_1^2 + 2\,t_2^2 - \\ - 4\,t_0 \cdot t_1 - 2\,.\,t_1\,t_2$$

resultando idéntica á la forma C calculada según el procedimiento del número anterior, si bien las notaciones empleadas son diferentes.

Para conocer el número de cuadrados negativos de C formemos la serie de menores principales de ∇.

$$1 \qquad C_{22} \qquad (C_{22} \cdot C_{11} - C_{12}^{2}) \qquad \nabla$$

que en este caso serán

$$(11) \qquad 1 \qquad 6 \qquad -144\,\alpha^2 - 126\,.\,\alpha + 72 \qquad f(\alpha)\,.\,D$$

El discriminante D de una función de tercer grado tiene por expresión [Weber, página 178]

$$D = a_1^{\,2}\, a_2^{\,2} + 18\, a_0 \,.\, a_1 \,.\, a_2 \,.\, a_3 - 4\, a_0 \,.\, a_2^{\,3} - 4\, a_1^{\,3} \,.\, a_3 + 2\, a_0^{\,2} \,.\, a_3^{\,2}$$

de modo que aquí

$$D = 110$$

Para $\alpha = 0$, la serie (11) vale

$$1 \qquad 6 \qquad 72 \qquad 110$$

no teniendo entonces variación alguna, luego $N_0 = 0$.

Si hacemos $\alpha = 1$, la serie (11) será

$$1 \qquad 6 \qquad -198 \qquad -110$$

con una variación; por lo cual $N_1 = 1$. Existirá, pues, una raíz real entre 0 y 1.

Cuando $\alpha = \infty$ los signos de la serie (11) serán

$$+ \qquad + \qquad - \qquad +$$

presentándose dos variaciones, que hacen $N_{+\infty} = 2$.

Poniendo $\alpha = -\infty$ se tendrá la siguiente serie de signos

$$+ \qquad + \qquad - \qquad -$$

luego $N_{-\infty} = 1$.

La ecuación dada tiene, pues, una raíz real entre 0 y 1; otra entre 1 y $+\infty$; y la tercera negativa entre 0 y $-\infty$.

Otro ejemplo.—Sea la ecuación

$$x^3 - 2\,x - 5 = 0$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -2 \qquad a_3 = -5$$

Aplicando las fórmulas precedentes obtendremos

$$C_{0.0} = 5(2 . \alpha + 15)$$
$$C_{1.1} = 8 - 15 . \alpha$$
$$C_{2.2} = +4$$
$$C_{0.1} = +40$$
$$C_{0.2} = -30 . \alpha$$
$$C_{1.2} = -8\alpha + 30$$

por lo cual

$$C = \alpha . \left[10 . t_0^2 - 15 . t_1^2 - 30 . t_0 . t_2 - 8 . t_1 . t_2\right] + 75 . t_0^2 + 8 t_1^2 + + 4 . t_2^2 + 40 . t_0 . t_1 + 30 . t_1 . t_2$$

La serie de menores principales de esta forma será

$$1 \qquad 4 \qquad -64\alpha^2 - 12\alpha - 868 \qquad 82 . f(\alpha)$$

Para $\alpha = 0$ esta serie vale

$$1 \qquad 4 \qquad -868 \qquad -410$$

y como sólo presenta una variación, de aquí que $N_0 = 1$.
Haciendo $\alpha = +\infty$ la serie anterior se transforma en

$$1 \qquad 4 \qquad -64 \qquad +82$$

valiendo, pues, $N_{+\infty} = 2$.
Cuando $\alpha = -\infty$ se tiene

$$1 \qquad 4 \qquad -64 \qquad -82$$

por lo que $N_{+\infty} = 1$.
De este análisis resulta que la ecuación dada tiene una sola raíz real positiva y dos raíces imaginarias conjugadas.

§ 29.—Otro aspecto en que puede considerarse el problema de encontrar el número de raíces reales de una ecuación.

El procedimiento que vamos á exponer es muy semejante, si bien distinto, al seguido por M. Hurwitz para resolver este mismo

problema. [Véase obra de Weber, págs. 333 á 339]. Ambos métodos son correlativos.

La ecuación dada

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + a_{m-1} \cdot z + a_m$$

es entera y de grado m en la variable z.

Supongamos que Φ (x) represente á otra función cualquiera de grado indeterminado, pero entera con relación á z. Podrá encontrarse, por medio de reglas conocidas, el cociente de Φ (z) por f (z) así como también su residuo correspondiente.

Este resto se dividirá por $f(z)$ de modo que se obtenga una serie creciente respecto á la variable z, para lo cual se comenzará la división por los términos independientes de ambos polinomios, ordenados los dos según las potencias ascendentes de z.

Así procediendo se encontrará el siguiente desarrollo

(1) $$c_0 z^0 + c_1 \cdot z^1 + c_2 \cdot z^2 + c_3 \cdot z^3 + \ldots\ldots = \sum_{0\,..}^{h} c_h \cdot z^h$$

Sea ahora

(2) $$\theta(z) = t_0 + t_1 \cdot z^{-1} + t_2 \cdot z^{-2} + \ldots\ldots + t_{m-1} \cdot z^{-m+1}$$

una función racional de grado 0 en z y con m variables independientes t_0, t_1, t_2 . . . . . t_{m-1}. Tendremos pues

(3) $$\theta^2(z) \cdot \frac{\Phi(z)}{f(z)} = \frac{\Phi(z)}{f(z)} \cdot \sum_{0.m-1}^{i} \sum_{0.m-1}^{k} t_i\, t_k \cdot z^{-i-k}$$

y considerando en $\frac{\Phi(z)}{f(z)}$ la serie antes mencionada según las potencias crecientes de z, esta porción del producto (3) valdrá

(4) $$\sum_{0\ldots}^{h} \sum_{0.m-1}^{i} \sum_{0.m-1}^{k} c_h \cdot t_i \cdot t_k \cdot z^{h-i-k}$$

para abreviar llamaremos

$$\lambda = h - i - k$$

así es que la expresión (4) tomará la forma

$$\sum_{0\ldots}^{\lambda} z^{\lambda} \cdot \sum_{0.m-1}^{i\ k} c_{\lambda+i+k}\, t_i \cdot t_k$$

Al coeficiente de z^λ, que es una forma cuadrática con relación á las m variables t_i, t_k, se designará por C_λ, cuyo valor será

$$C_\lambda = \sum_{0.m-1}^{i.k} c_{\lambda+i+k} \cdot t_i \cdot t_k$$

Como más importante de todas nos fijaremos en la que corresponde á $\lambda = 0$

(5) $$C = \sum_{0.m-1}^{i.k} c_{i+k} \cdot t_i \cdot t_k$$

En el caso de que $f(z)$ no tenga raíces múltiples, ya hemos demostrado [§ 15] que

$$\frac{\Phi(z) \cdot \theta^2(z)}{f(z)} = G(z) + S z^\lambda \cdot \sum_{1\ m}^{i} \frac{\Phi(x_i) \cdot \theta^2(x_i)}{x_i^\lambda \cdot E_1 f(x_i)}$$

por lo cual

(6) $$C_\lambda = \sum_{1.m}^{i} \frac{\Phi(x_i) \cdot \theta^2(x_i)}{x_i^\lambda \cdot E_1 f(x_i)}$$

en la que haciendo $\lambda = 0$ y recordando que á C_0 se ha llamado C,

(7) $$C = \sum_{1.m}^{i} \frac{\Phi(x_i) \cdot \theta^2(x_i)}{E_1 f(x_i)}$$

Las sumas anteriores $\sum_{1.m}^{i}$ se extienden á las m raíces $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ x_m de la ecuación dada $f(z) = 0$. El símbolo S se refiere á todos los términos de la serie obtenida por desarrollar el cociente según las potencias crecientes de la variable z.

Como el determinante del sistema de funciones

$$\theta(x_1) \qquad \theta(x_2) \qquad \theta(x_3) \ldots\ldots \theta(x_m)$$

de las m variables $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots t_m$ vale

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^{-1} & x_1^{-2} \ldots\ldots x_1^{-m+1} \\ 1 & x_2^{-1} & x_2^{-2} \ldots\ldots x_2^{-m+1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & x_m^{-1} & x_m^{-2} \ldots\ldots x_m^{-m+1} \end{vmatrix}$$

una cantidad diferente de cero, pues, por hipótesis, todas las raíces de $f(z) = 0$ son distintas entre sí, resultará que las funciones $\theta(x_i)$ son linealmente independientes unas de otras y de aquí deducimos que la fórmula (7) da á conocer la descomposición de C_λ en una suma de m cuadrados.

Haciendo

(8) $$y_i = \theta(x_i) \cdot \sqrt{\frac{\Phi(x_i)}{E_1 f(x_i)}}$$

se tendrá entonces

(9) $$C = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots\ldots + y_m^2$$

De esta suma (9) la cantidad y_i no puede desaparecer más que cuando $\Phi(x_i)$ es nulo; y recíprocamente, desde el momento que $\theta(x_i)$ y $E_1 f(x_i)$ son diferentes de cero. En tal caso x_i será una raíz común de $f(z)$ y $\Phi(z)$. Deducimos por tanto, que el número ρ de cuadrados nulos de la función C, es igual al grado del máximo común divisor de $f(z)$ y $\Phi(z)$: es cero ($\rho = 0$) cuando las funciones f y Φ son primas entre sí.

Conocido ρ veamos el modo de culcular

π = número de cuadrados positivos de C
v = — — negativos de C

para así tener el valor de los tres *números característicos de la inercia de la cuadrática C*.

En el caso de que x_1 y x_2 sean un par de raíces imaginarias conjugadas de $f(z) = 0$ tales que $\Phi(x_1)$ no valga cero, tendremos

$$y_1 = M + i \cdot N \qquad y_2 = M - i \cdot N$$

luego

$$y_1^2 + y_2^2 = 2(M^2 - N^2)$$

expresión que da una unidad á cada uno de los números π y v.

Cuando x_i es una raíz real, el cuadrado y_i^2 tendrá coeficiente positivo ó negativo según que $\Phi(x_i)$ y $E_1 f(x_i)$ sean ó no del mismo signo.

Tendremos así los principios siguientes para determinar los números característicos de la forma C:

ρ = al número de cantidades $\Phi(x_i)$ iguales á cero.

π = al número de pares de raíces imaginarias x_i que no anulan á $\Phi(x_i)$, aumentado del número de raíces reales que dan á $\Phi(x)$. $E_1 f(x)$ el signo positivo.

v = al número de pares de raíces imaginarias que no anulan á $\Phi(x)$, aumentado del número de raíces reales que dan á $\Phi(x)$. $E_1 f(x)$ el signo negativo.

Demostremos ahora que:

1.º *Si las funciones $f(z)$ y $\Phi(z)$ no son primas entre sí, la forma cuadrática C no es definida.* (Corral.)

Es necesario advertir que se entiende por forma cuadrática definida aquella cuyos cuadrados son todos positivos ó todos negativos, es decir, que cumple con una cualquiera de las dos siguientes condiciones

$$\pi = m \qquad \rho = v = 0 \qquad \text{ó} \qquad \pi = \rho = 0\,. \qquad v = m\,.$$

Cuando $f(z)$ y $\Phi(z)$ no sean primas entre sí, tendrán alguna raíz x_i común; entonces el término y_i será nulo por ser $\Phi(x_i) = 0$, y la forma C no podrá ser definida desde el momento que ρ deja de ser cero.

2.º *Si $f(z)$ y $E_1 f(z)$ tienen un divisor común, la forma cuadrática C no es definida.* (Corral.)

Caso de que $f(z)$ y $E_1 f(z)$ admitiesen un factor común, se podrá determinar una función $Q(z)$ de primer grado por lo menos, tal que

$$f(z) = Q^2 \,.\, f_1(z)$$

siendo el producto $Q \,.\, f_1(z)$ de grado inferior á m.

El menor exponente de z en la función $\theta(z)$ es $-m+1$, por lo que elegiremos las indeterminadas $t_0, t_1, t_2 \ldots\ldots t_{m-1}$ de tal modo que se cumpla la igualdad

$$z^{m-1} \,.\, \theta(z) = Q \,.\, f_1(z)$$

y entonces

$$\frac{\Phi(z) \,.\, \theta^2(z)}{f(z)} = \frac{\Phi(z) \,.\, Q^2 \,.\, f_1^{\,2}(z)}{Q^2 \,.\, f_1(z) \,.\, z^{2m-2}} = \frac{\Phi(z) \,.\, f_1(z)}{z^{2m-2}}$$

Llamando g al grado de $\Phi(z)$ que supondremos sea inferior á m, y por g' al grado de $f_1(z)$, tendremos

$$\left.\begin{array}{l} g < m \\ g' \leqq m - 2 \end{array}\right\} G = g + g' < 2m - 2$$

es decir, que el grado G del producto $\Phi(z) \,.\, f_1(z)$ es inferior á $2m - 2$.

Resultará, por tanto, que la fracción

$$\frac{\Phi(z) \,.\, f_1(z)}{z^{2m-2}}$$

desarrollada no tendrá exponentes positivos de z; la función C se reduce así á cero lo mismo que todas las restantes C_λ. Se llegará entonces á la consecuencia de que existen valores no nulos de los variables t_i que anulan á C, lo que es imposible en el caso de una forma definida.

Es importante observar que nuestras formas C_λ y C definidas y calculadas precedentemente, son distintas de las cuadráticas T_λ y T empleadas por Hurwitz en sus investigaciones [véase obra de Weber, páginas 333 á 339].

El caso de que nuestra cuadrática C sea una forma definida no puede presentarse más que si las funciones $\Phi(z)$ y $f(z)$ son primas entre sí, cuando $f(z)$ no admita más que raíces reales distintas y que además el producto $\Phi(x) \,.\, E_1 f(x)$ tenga el mismo signo para todas las raíces de $f(z) = 0$. Estas tres condiciones simultáneas son necesarias para que la forma C sea definida.

Suponiendo que α y β sean dos raíces consecutivas del mismo signo, como

$$E_1 f(\alpha) = -\alpha \,.\, f'(\alpha)$$
$$E_1 f(\beta) = -\beta \,.\, f'(\beta)$$

entonces $E_1 f(\alpha)$ y $E_1 f(\beta)$ serán de signos contrarios [teorema I del § 19] ya que también sucede lo mismo con $f'(\alpha)$ y $f'(\beta)$. Como el producto $\Phi(x) \,.\, E_1 f(x)$ ha de conservarse con signo invariable para $x = \alpha$ y $x = \beta$ las funciones $\Phi(\alpha)$ y $\Phi(\beta)$ serán de signos distintos, lo que indica la existencia, entre ambas cantidades α, β, de una ó un número impar de raíces de $\Phi(z) = 0$.

Cuando las dos raíces consecutivas α, β, de $f(z) = 0$, sean de signos contrarios, entonces $E_1 f(\alpha)$ y $E_1 f(\beta)$ tienen el mismo sig-

no al igual que $\Phi(\alpha)$ y $\Phi(\beta)$; por lo tanto, las cantidades α, β comprenden cero ó un número par de raíces de $\Phi(z) = 0$.

Las tres condiciones enunciadas anteriormente son las suficientes para que la forma C sea definida y del mismo signo que el producto $\Phi(x) . E_1 f(x)$.

Dado el caso de que todas las raíces de $f(z) = 0$ sean reales y *del mismo signo*, resultará que C es una forma definida cuando se satisfacen las anteriores condiciones; en tal supuesto, será preciso que el grado de Φ no sea inferior á $(m - 1)$, pues entre dos raíces consecutivas de $f(z) = 0$ existe una ó un número impar de raíces de $\Phi(z) = 0$. Pero si el grado de Φ no fuese tampoco superior á $(m - 1)$, entonces dos raíces consecutivas de $f(z) = 0$ comprenderán una sola y única raíz de $\Phi(z) = 0$; se podrá, pues, decir que las raíces de $f(z)$ están separadas por las raíces de $\Phi(z)$.

La forma definida C será además *positiva* cuando el primer coeficiente c_0 sea mayor que cero, aparte de cumplirse las anteriores condiciones; este caso se presentará cuando los términos independientes ó coeficientes de z^0 tengan el mismo signo en $f(z)$ y $\Phi(z)$.

Para que una forma cuadrática de m variables sea positiva, es condición necesaria y suficiente que todos los términos de la cadena ó serie formada con los menores principales de su discriminante sean cantidades positivas [obra de Weber, pág. 310].

Haciendo

$$F_v = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \cdots\cdots c_v \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots c_{v+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 \cdots\cdots c_{v+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ c_v & c_{v+1} & c_{v+2} \cdots\cdots c_{2v} \end{vmatrix}$$

podemos enunciar el teorema siguiente:

I.—*Sean:* $f(x) = 0$ *una ecuación de grado* m *cuyas raíces son todas reales diferentes y del mismo signo;* $\Phi(x) = 0$ *una ecuación de grado* $(m - 1)$; *los términos independientes de* f *y* Φ *se suponen del mismo signo. Las condiciones necesarias y suficientes para que las raíces de* $f(x) = 0$ *sean separadas por las raíces de* $\Phi(x) = 0$, *son que los determinantes*

$$F_0 \qquad F_1 \qquad F_2 \cdots\cdots F_{m-1}$$

sean todos positivos. (Corral.)

Si suponemos que

$$\Phi(z) = E_1 f(z) \text{ ó } \frac{\Phi(z)}{E_1 f(z)} = 1$$

se tendrá entonces

$$\Phi(z) . E_1 f(z) = \left[\Phi(z)\right]^2$$

cantidad que es siempre positiva para cualquier valor real de z.

El coeficiente c_0 será también positivo, pues los términos independientes de una función y de su euleriana son en todos los casos del mismo signo.

Según vimos al final del § 15, en este caso particular los coeficientes c_{i+k} de la forma C valen

$$c_0 = n = s^0 \qquad c_1 = s^1 \qquad c_2 = s^2 \ldots\ldots c_v = s^v \ldots\ldots$$

si representamos por s^v la cantidad

$$\frac{1}{x_1^{\,v}} + \frac{1}{x_2^{\,v}} + \frac{1}{x_3^{\,v}} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_m^{\,v}}$$

Poniendo

$$D_v = \begin{vmatrix} s^0 & s^1 & s^2 \ldots\ldots s^v \\ s^1 & s^2 & s^3 \ldots\ldots s^{v+1} \\ s^2 & s^3 & s^4 \ldots\ldots s^{v+2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ s^v & s^{v+1} & s^{v+2} \ldots\ldots s^{2v} \end{vmatrix}$$

tendremos la siguiente proposición:

II.—*Para que la ecuación* $f(x) = 0$ *de grado* m *no admita más que raíces reales y distintas, es necesario y suficiente que los determinantes* D_0, D_1, D_2 .... D_{m-1} *sean todos positivos.*

Cuando se hace $\Phi(x) = (x - a) . E_1 f(x)$ siendo a un número real cualquiera que no sea raíz de $f(x)$, se tendrá $\rho = 0$ si $f(x)$ no tiene más que raíces simples, pues con tales hipótesis las funciones $f(x)$ y $\Phi(x)$ serán primas entre sí.

En tal caso π será igual al número de pares de raíces imaginarias x_i que no anulan á $\Phi(x)$, aumentado en el número de raíces reales que dan á $\Phi(x) . E_1 f(x) = (x - a) . \left[E_1 f(x)\right]^2$ el signo po-

sitivo, las cuales son precisamente aquellas raíces superiores al número a.

v será igual al número de pares de raíces imaginarias que no anulan á $\Phi(x)$, aumentado en el número de raíces reales inferiores á la cantidad a.

De aquí resulta que la cantidad $\pi - v$ será la diferencia entre el número de raíces reales superiores á a y la totalidad de raíces reales inferiores al mismo número a; y esto ocurrirá ya tenga ó no $f(x)$ raíces imaginarias.

Cuando el número a atraviesa, creciendo, una de las raíces de $f(x)$, la diferencia $\pi - v$ disminuye en dos unidades.

Sean a y $b > a$ dos límites, no raíces de $f(x) = 0$, entre los cuales deseamos saber cuántas raíces (r) hay comprendidas de la ecuación dada. Encontrando la forma C para

$$\Phi(x) = (x - a) . E_1 f(x)$$

tendremos según se ha demostrado

$$N_a = \pi - v = r_{>a} - r_{<a}$$

designando por

$r_{>a}$ = el número de raíces reales de $f(x) = 0$ superiores á a
$r_{<a}$ = » » » $f(x) = 0$ inferiores á a

Calculando después la cuadrática C para

$$\Phi(x) = (x - b) . E_1 f(x)$$

hallaremos del mismo modo

$$N_b = \pi^1 - v^1 = r_{>b} - r_{<b}$$

por lo que

$$N_a - N_b = (r_{>a} - r_{>b}) + (r_{<b} - r_{<a})$$

pero siendo evidentemente

$$(r) = r_{>a} - r_{>b} = r_{<b} - r_{<a}$$

resultará en definitiva

$$N_a - N_b = 2 . (r)$$

Queda así resuelto, por otro procedimiento, el problema de encontrar el número de raíces reales de una ecuación, comprendidas entre dos límites dados.

Como el determinante de la forma cuadrática á considerar es diferente de cero, el número π de cuadrados positivos es igual al de permanencias que presenta la serie de menores principales de dicho determinante.

La totalidad v de cuadrados negativos de la forma está dada por el número de variaciones que tiene esa misma serie de menores. [Weber págs. 303 á 306.]

Ejemplo I.—Dada la ecuación.

$$f(z) = z^3 - 3z + 1 = 0$$

se desea averiguar el número exacto de sus raíces reales positivas y negativas. Comenzaremos por hallar el límite superior de las raíces positivas y el inferior de las negativas; para lo cual se calculará la transformada en $\frac{1}{z} = z'$

$$\varphi(z') = z'^3 - 3z'^2 + 1 = 0$$

y la serie de sus eulerianas respectivas

$$E_1 \varphi(z') = -3z'^2 + 3$$
$$E_2 \varphi(z') = +6$$
$$E_3 \varphi(z') = +6$$

que se hacen todas positivas con el valor $z' = 0.5$, de donde $z = \frac{1}{0.5} = 2$ es el límite superior buscado. En cuanto al límite inferior de las raíces negativas, se investiga por medio de la serie

$$\varphi(-z') = -z'^3 - 3.z'^2 + 1$$
$$E_1 \varphi(-z') = -3.z'^2 + 3$$
$$E_2 \varphi(-z') = +6$$
$$E_3 \varphi(-z') = +6$$

cuyos términos toman valores positivos para $z' = 0.5$, luego $z = -\frac{1}{0.5} = -2$ es el número que se necesita.

Con estos datos el problema queda reducido á encontrar el nú-

mero de raíces reales de $f(z) = 0$ comprendidas entre 0 y $+2$, así como entre 0 y -2.

Haremos primeramente

$$\Phi(z) = (z - 2) \, . \, E_1 \, f(z) = (z - 2) \, . \, (-6 \, z + 3) = -6 + 15 \, . \, z - 6 \, . \, z^2$$

para obtener el cociente

$$\frac{\Phi(z)}{f(z)} = \frac{-6 + 15 \, . \, z - 6 \, . \, z^2}{1 - 3 \, . \, z + z^3}$$

según las potencias ascendentes de la variable z. La operación se realizará del modo siguiente:

$$\begin{array}{r|l}
-6 + 15 \, . \, z - 6 \, . \, z^2 & \\
+6 - 18 \, . \, z + 6 \, . \, z^3 & 1 - 3 \, z + z^3 \\
\hline
-3 \, . \, z - 6 \, . \, z^2 + 6 \, . \, z^3 & -6 - 3 \, z - 15 \, . \, z^2 - 39 \, . \, z^3 - 114 \, . \, z^4 - \ldots\ldots \\
+3 \, . \, z - 9 \, . \, z^2 + 3 \, . \, z^4 & \\
\hline
-15 \, . \, z^2 + 6 \, . \, z^3 + 3 \, . \, z^4 & \\
+15 \, . \, z^2 \quad 45 \, . \, z^3 + 15 \, . \, z^5 & \\
\hline
-39 \, . \, z^3 + 3 \, . \, z^4 + 15 \, . \, z^5 & \\
+39 \, . \, z^3 - 117 \, . \, z^4 + 39 \, . \, z^6 & \\
\hline
-114 \, . \, z^4 + 15 \, . \, z^5 + 39 \, . \, z^6 & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

De aquí deduciremos que

$$c_0 = -6 \qquad c_1 = -3 \qquad c_2 = -15 \qquad c_3 = -39 \qquad c_4 = -114$$

por lo cual, la forma cuadrática respectiva será

$$C_2 = c_0 \, . \, t_0^{\;2} + c_2 \, . \, t_1^{\;2} + c_4 \, . \, t_2^{\;2} + 2 \, . \, c_1 \, . \, t_0 \, . \, t_1 + 2 \, . \, c_2 \, . \, t_0 \, . \, t_2 + \\ + 2 \, c_3 \, . \, t_2 \, . \, t_1$$

ó bien

$$C_2 = -6 \, . \, t_0^{\;2} - 15 \, . \, t_1^{\;2} - 114 \, . \, t_2^{\;2} - 6 \, . \, t_0 \, . \, t_1 - 30 \, . \, t_0 \, . \, t_2 - 78 \, . \, t_1 \, . \, t_2$$

El determinante de C_2 vale

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 & -15 \\ -3 & -15 & -39 \\ -15 & -39 & -114 \end{vmatrix} = -243$$

siendo la serie de sus menores principales

$$+1 \qquad -6 \qquad +81 \qquad -243$$

por lo que

$$\pi_2 = 0 \qquad v_2 = +3$$

luego

$$N_2 = \pi_2 - v_2 = -3 .$$

Poniendo ahora

$$\Phi(z) = z \cdot E_1 f(z) = -6 \cdot z^2 + 3 \cdot z$$

la división

$$\frac{-6 \cdot z^2 + 3 \cdot z}{z^3 - 3 \cdot z + 1}$$

nos da los siguientes coeficientes

$$c_0 = 0 \qquad c_1 = 3 \qquad c_2 = 3 \qquad c_3 = 9 \qquad c_4 = 24$$

obteniéndose, por tanto, la cuadrática

$$C_0 = 3 \quad t_1^2 + 24 \quad t_2^2 + 6 \cdot t_0 \cdot t_1 + 6 \cdot t_0 \cdot t_2 + 18 \cdot t_1 \cdot t_2$$

cuyo discriminante es

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 24 \end{vmatrix} = -81$$

La serie de menores á considerar vale

$$+1 \qquad 0 \qquad -9 \qquad -81$$

de donde

$$\pi_0 = 2 \qquad v_0 = 1$$

así es que

$$N_0 = \pi_0 - v_0 = +1$$

El número de raíces positivas y reales de la ecuación propuesta será, pues, igual á

$$\frac{1}{2}(N_0 - N_2) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Para deducir la totalidad de las raíces negativas tendremos que realizar el cociente

$$\frac{\Phi(z)}{f(z)} = \frac{(z+2) \cdot E_1 f(z)}{f(z)} = \frac{(z+2) \cdot (-6 \cdot z + 3)}{z^3 - 3 \cdot z + 1} = \frac{6 - 9 \cdot z - 6 \cdot z^2}{1 - 3 \cdot z + z^3}$$

según las potencias ascedentes de z, resultando así los coeficientes

$$c_0 = 6 \qquad c_1 = 9 \qquad c_2 = 21 \qquad c_3 = 57 \qquad c_4 = 162$$

La forma cuadrática correspondiente será

$$C_{-2} = 6 \cdot t_0^2 + 21 \cdot t_1^2 + 162 \cdot t_2^2 + 18 \cdot t_0 \cdot t_1 + 42 \cdot t_0 \cdot t_2 + 114 \cdot t_1 \cdot t_2$$

con un determinante igual á

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 21 \\ 9 & 21 & 57 \\ 21 & 57 & 162 \end{vmatrix} = +81$$

cuya serie de menores vale

$$+1 \qquad +6 \qquad +45 \qquad +81$$

por lo que

$$\pi_{-2} = 3 \qquad v_{-2} = 0$$

y en definitiva

$$N_{-2} = \pi_{-2} - v_{-2} = +3$$

Con estos elementos deduciremos que el número de raíces reales negativas de la ecuación dada es

$$\frac{1}{2} \cdot (N_{-2} - N_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

conforme se deseaba investigar.

Ejemplo II.—Consideremos la ecuación

$$f(z) = z^4 - 2 \cdot z^3 - 3 \cdot z^2 + z - 1 = 0$$

á la que vamos á aplicar nuestro método anterior, empezando por calcular los límites extremos de sus raíces reales. Á tal fin, su transformada en $\frac{1}{z} = z'$ nos permite formar el siguiente cuadro:

	+ 1	+ 0.5	+ 0.4	+ 0.34
$\varphi(z') = -z'^4 + z'^3 - 3 \cdot z'^2 - 2 \cdot z' + 1$			−	+
$E_1 \varphi(z') = z'^3 - 6 \cdot z'^2 - 6 \cdot z' + 4$		−	+	+
$E_2 \varphi(z') = -6 \cdot z'^2 - 12 \cdot z' + 12$	−	+	+	+
$E_3 \varphi(z') = -12 \cdot z' + 24$	+	+	+	+
$E_4 \varphi(z') = 24$	+	+	+	+

que nos indica que $\frac{1}{0.34} = 2.94$ ó bien 3, es el límite superior de las raíces positivas. El valor mínimo de las raíces negativas se deduce de la serie de funciones

	+ 1	+ 0.5
$\varphi(-z') = -z'^4 - z'^3 - 3 \cdot z'^2 + 2 \cdot z' + 1$	−	+
$E_1 \varphi(-z') = -z'^3 - 6 \cdot z'^2 + 6 \cdot z' + 4$	+	+
$E_2 \varphi(-z') = -6 \cdot z'^2 + 12 \cdot z' + 12$	+	+
$E_3 \varphi(-z') = 12 \cdot z' + 24$	+	+
$E_4 \varphi(-z') = 24$	+	+

que toman todas valores positivos para

$z' = +0.5$; luego $z = -\frac{1}{0.5} = -2$ es el número buscado.

La primera función $\Phi(z)$ á considerar es

$$\Phi(z) = (z - 3) \cdot E_1 f(z) = -2 \cdot z^4 + 21 \cdot z^2 - 13 \cdot z + 12$$

que nos servirá para la siguiente división

$$12 - 13\ z + 21 \,.\, z^2 - 2 \,.\, z^4 \quad \Big| \quad -1 + z - 3 \,.\, z^2 - 2 \,.\, z^3 + z^4$$
$$-12 + 12\ z - 36 \,.\, z^2 - 24\ z^3 + 12 \,.\, z^4 \quad \Big| \quad -12 + z + 16\, z^2 + 37 \,.\, z^3 - 23\, z^4 - 165 \,.\, z^5 - 154 \,.\, z^6 + \ldots$$
$$- z - 15 \,.\, z^2 - 24 \,.\, z^3 + 10 \,.\, z^4$$
$$+ z - z^2 + 3 \,.\, z^3 + 2\ z^4 - z^5$$
$$- 16 \,.\, z^2 - 21 \,.\, z^3 + 12 \,.\, z^4 - z^5$$
$$+ 16 \,.\, z^2 - 16 \,.\, z^3 + 48 \,.\, z^4 + 32 \,.\, z^5 - 16 \,.\, z^6$$
$$- 37 \,.\, z^3 + 60\ z^4 + 31\ z^5 - 16 \,.\, z^6$$
$$+ 37\ z^3 - 37 \,.\, z^4 + 111 \,.\, z^5 + 74 \,.\, z^6 - 37 \,.\, z^7$$
$$+ 23\ z^4 + 142 \,.\, z^5 + 58 \,.\, z^6 - 37 \,.\, z^7$$
$$- 23 \,.\, z^4 + 23\ z^5 - 69 \,.\, z^6 - 46 \,.\, z^7 + 23 \,.\, z^8$$
$$+ 165 \,.\, z^5 - 11 \,.\, z^6 - 83 \,.\, z^7 + 23 \,.\, z^8$$
$$- 165 \,.\, z^5 + 165\ z^6 - 495 \,.\, z^7 - 330 \,.\, z^8 + 165 \,.\, z^9$$
$$+ 154 \,.\, z^6 - 578 \,.\, z^7 - 307 \,.\, z^8 + 165 \,.\, z^9$$

. . . .

. . . .

de la que obtenemos

$$c_0 = -12 \qquad c_1 = 1 \qquad c_2 = 16 \qquad c_3 = 37 \qquad c_4 = -23 \qquad c_5 = -165 \qquad c_6 = -154$$

La forma cuadrática respectiva es

$$C_3 = c_0 \cdot t_0^{\,2} + c_2 \cdot t_1^{\,2} + c_4 \cdot t_2^{\,2} + c_6 \cdot t_3^{\,2} + 2 \cdot c_1 \cdot t_0 \cdot t_1 + 2\, c_2 \cdot t_0 \cdot t_2 +$$
$$+ 2\, c_3 \cdot t_0 \cdot t_3 + 2\, c_3 \cdot t_1 \cdot t_2 + 2\, c_4 \cdot t_3 \cdot t_1 + 2\, c_5 \cdot t_2 \cdot t_3$$

ó bien

$$C_3 = -12 \cdot t_0^{\,2} + 16 \cdot t_1^{\,2} - 23 \cdot t_2^{\,2} - 154 \cdot t_3^{\,2} + 2\, t_0 \cdot t_1 + 32 \cdot t_0 \cdot t_2 +$$
$$+ 74 \cdot t_0 \cdot t_3 + 74 \cdot t_1 \cdot t_2 - 46 \cdot t_3 \cdot t_1 - 330 \cdot t_2 \cdot t_3$$

valiendo su determinante

$$\begin{vmatrix} -12 & 1 & 16 & 37 \\ 1 & 16 & 37 & -23 \\ 16 & 37 & -23 & -165 \\ 37 & -23 & -165 & -154 \end{vmatrix} = -261932$$

cuya serie de menores principales es

$$+1 \quad ; \quad -12 \quad ; \quad \begin{vmatrix} -12 & 1 \\ -1 & 16 \end{vmatrix} = -193\ ;$$

$$\begin{vmatrix} -12 & 1 & 16 \\ 1 & 16 & 37 \\ 16 & 37 & -23 \end{vmatrix} = +17955 \; ; \quad -261932$$

De aquí resultarán los valores

$$\pi_3 = 1 \qquad\qquad v_3 = 3$$

luego entonces

$$N_3 = \pi_3 - v_3 = -2 .$$

Haciendo ahora

$$\Phi(z) = z . E_1 f(z) = -4 z + 3 . z^2 - 6 . z^3 - 2 . z^4$$

habrá que realizar, del modo ya indicado, la división

$$\frac{-4 . z + 3 . z^2 - 6 . z^3 - 2 . z^4}{-1 + z - 3 . z^2 - 2 . z^3 + z^4}$$

que nos conducirá á los coeficientes

$$c_0 = 0 \qquad\qquad c_4 = -14$$
$$c_1 = 4 \qquad c_3 = -5 \qquad c_5 = 3$$
$$c_2 = 1 \qquad\qquad c_6 = 56$$

de la siguiente cuadrática

$$C_0 = t_1^2 - 14 . t_2^2 + 56 . t_3^2 + 8 t_0 . t_1 + 2 . t_0 . t_2 - 10 . t_0 . t_3 -$$
$$- 10 . t_1 . t_2 - 28 t_3 . t_1 + 6 . t_2 . t_3$$

El discriminante de esta forma es

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 & -5 \\ 4 & 1 & -5 & -14 \\ 1 & -5 & -14 & 3 \\ -5 & -14 & 3 & 56 \end{vmatrix} = +4129$$

con una serie de menores principales igual á

$$+1 \quad ; \quad 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -16 \; ;$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ 1 & -5 & -14 \end{vmatrix} = +183 \quad ; \quad +4129$$

por lo que se tendrá

$$\pi_0 = 2 \qquad\qquad v_0 = 2$$

luego en definitiva

$$N_0 = \pi_0 - v_0 = 0$$

El número de raíces reales positivas de la ecuación vale pues

$$\frac{1}{2} \cdot (N_0 - N_3) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

Para proceder á investigar el número de las raíces negativas pondremos

$$\Phi(z) = (z + 2) \cdot E_1 f(z) = -2 \cdot z^4 - 10 \cdot z^3 - 9 \cdot z^2 + 2 \cdot z - 8$$

de donde la división

$$\frac{-8 + 2 \cdot z - 9 \cdot z^2 - 10 \cdot z^3 - 2 \cdot z^4}{-1 + z - 3 \cdot z^2 - 2 \cdot z^3 + z^4}$$

que nos dará los coeficientes

$$\begin{array}{lll} c_0 = 8 & & c_4 = -8 \\ c_1 = 6 & c_3 = -33 & c_5 = 115 \\ c_2 = -9 & & c_6 = 196 \end{array}$$

de la siguente cuadrática

$$C_{-2} = 8 \cdot t_0^2 - 9 \cdot t_1^2 - 8 \cdot t_2^2 + 196 \cdot t_3^2 + 12 \cdot t_0 \cdot t_1 - 18 \cdot t_0 \cdot t_2 - \\ - 66 \cdot t_0 \cdot t_3 - 66 \cdot t_1 \cdot t_2 - 16 \cdot t_1 \cdot t_3 + 230 \cdot t_2 \cdot t_3$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & -9 & -33 \\ 6 & -9 & -33 & -8 \\ -9 & -33 & -8 & 115 \\ -33 & -8 & 115 & 196 \end{vmatrix} = -65057$$

La serie de menores á considerar valdrá pues

$$+1 \quad ; \quad +8 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = -108 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 6 & -9 \\ 6 & -9 & -33 \\ -9 & -33 & -8 \end{vmatrix} = -3555 \quad ; \quad -65057$$

de donde se deduce

$$\pi_{-2} = 3 \qquad\qquad v_{-2} = 1$$

luego

$$N_{-2} = \pi_{-2} - v_{-2} = 2 \, .$$

Resulta, por tanto, que la totalidad de raíces reales negativas es

$$\frac{1}{2} (N_{-2} - N_0) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

por todo lo cual la ecuación dada tiene dos raíces imaginarias conjugadas.

Queda así determinado el número y naturaleza de todas las raíces de la ecuación propuesta.

CAPÍTULO V

Separación de las raíces reales de una ecuación numérica.

§ 30.—Algunas propiedades generales.

Teorema I.—*Cuando para un valor $x = a$ de la variable, la euleriana $E_1 f(x)$ de una función entera $f(x)$ es negativa y $f(a) > 0$, dicha función será creciente si a es positivo y decreciente en el caso que* $a < 0$. (Corral.)

Según hemos demostrado

$$f(x+h) = f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} + \\ + E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} - \ldots\ldots$$

por lo cual

$$\text{(I)} \quad f(x+h) - f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m = - E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} + \\ + E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x^2} - \ldots\ldots$$

El signo del segundo miembro de (1) es el mismo que el de $-\dfrac{E_1 f(x)}{x}$ para valores de h suficientemente pequeños. Si para el

valor particular $x = a$ resultase $E_1 f(a) < 0$, $f(a) > 0$ podrá entonces suceder:

1.º *Que a sea positivo.* El cociente $-\frac{E_1 f(a)}{a}$ será mayor que cero, luego.

$$f(a+h) > f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m$$

y como

$$1 + \frac{h}{a} > 1 \qquad f(a) > 0 \qquad \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m > 1$$

resultará en definitiva

$$f(a+h) > f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m > f(a)$$

lo que prueba es creciente la función dada.

2.º *Que a sea negativo.* Por tal circunstancia tendremos:

$$-\frac{E_1 f(a)}{a} < 0$$

así es que

$$f(a+h) < f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m$$

pero

$$1 + \frac{h}{a} < 1 \qquad \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m < 1$$

luego finalmente

$$f(a+h) < f(a)$$

ó sea que la función es decreciente.

Teorema II.—*Cuando para un valor $x = a$ de la variable, la euleriana $E_1 f(x)$ de una función entera es positiva y $f(a)$ negativa, dicha función será decreciente si a es positivo y creciente en el caso que* $a < 0$. (Corral.)

Cuando se tenga conjuntamente

$$E_1 f(a) > 0 \qquad a > 0 \qquad f(a) < 0$$

se verificará

$$f(a+h) < f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m$$

y como

$$\left(1 + \frac{h}{a}\right)^m > 1 \qquad f(a) < 0$$

obtendremos

$$f(a+h) < f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m < f(a)$$

ó sea que la función es decreciente.

Caso de que

$$E_1 f(a) > 0 \qquad a < 0 \qquad f(a) < 0$$

probaríamos análogamente la desigualdad inversa

$$f(a+h) > f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m > f(a). \qquad \text{(c. a. e.)}$$

Teorema III.—*Si entre dos valores del mismo signo a y b de la variable la euleriana de una función entera no se anula, la función dada tendrá á lo más una raíz entre dichos límites a y b.* (Corral.)

Si $f(x)$ se anulara para $x = \alpha \gtrless {a \atop b}$ y $x = \beta \gtrless {a \atop b}$ comprendidas entre a y b, entonces $E_1 f(x)$ tendría una raíz en el espacio α, β; lo que es imposible, pues por hipótesis $E_1 f(x)$ no se reduce á cero entre a y b. De aquí el enunciado anterior.

Teorema IV.—*Sea $f(x)$ una función entera de la variable x; y $E_1 f(x)$, $E_2 f(x)$ las dos primeras eulerianas de $f(x)$. Creciendo x entre dos límites x_0 y X que no comprenden raíz alguna de la ecuación $E_1 f(x) - f(x) = 0$, la función*

$$\varphi(x) = x + \frac{x \cdot f(x)}{E_1 f(x) - f(x)} = \frac{x \cdot E_1 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

crecerá mientras que $f(x)$ y $E_2 f(x)$ sean del mismo signo y decrecerá cuando $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tengan signos contrarios. (Corral.)

Incrementando en u la variable x, tendremos

$$\varphi(x+u) = \frac{(x+u)\cdot\left[E_1 f(x) + u\cdot(E_1 f(x))' + \frac{u^2}{1.2}\cdot(E_1 f(x))'' + \ldots\ldots\right]}{E_1 f(x) + u\cdot(E_1 f(x))' + \frac{u^2}{1.2}\cdot(E_1 f(x))'' + \ldots\ldots - \left[f(x) + u\cdot f'(x) + \frac{u^2}{1.2}\cdot f''(x) + \ldots\ldots\right]}$$

ó también bajo la forma

$$\varphi(x+u) = \frac{x\cdot E_1 f(x) + x\cdot u\,(E_1 f(x))' + u\cdot E_1 f(x) + A\cdot u^2}{E_1 f(x) - f(x) + u\cdot(E_1 f(x))' - u\cdot f'(x) + B\cdot u^2}$$

donde A y B representan dos funciones enteras de la variable x.

De aquí se deduce, después de realizar operaciones

$$\varphi(x+u) - \varphi(x) = \frac{A'\,u^2 + u\cdot\left[E_1 f(x)\right]^2 - u\cdot x\cdot f(x)\cdot\left[E_1 f(x)\right]' - u\cdot f(x)\cdot E_1 f(x) + u\;x\cdot f'(x)\cdot E_1 f(x)}{\left[E_1 f(x) - f(x)\right]^2 + B'\cdot u}$$

pero en virtud de las relaciones conocidas

$$-x\cdot\left[E_1 f(x)\right]' - E_1 f(x) = E_2 f(x) - m\cdot E_1 f(x)$$

$$x\cdot f'(x) + E_1 f(x) = m\cdot f(x)$$

quedará en definitiva

$$\varphi(x+u) - \varphi(x) = \frac{u\cdot f(x)\cdot E_2 f(x) + A'\cdot u^2}{\left[E_1 f(x) - f(x)\right]^2 + B'\,u}$$

en donde

$$\text{(2)}\qquad \frac{\varphi(x+u) - \varphi(x)}{u} = \frac{f(x)\cdot E_2 f(x) + A'\,u}{\left[E_1 f(x) - f(x)\right]^2 + B'\cdot u}$$

Si h representa una cantidad positiva de módulo infinitamente pequeño, el segundo miembro y el primero de (2) tendrán el signo de $f(x)$. $E_2 f(x)$ para todos los valores de x comprendidos entre

$-h$ y $+h$ y siempre que $E_1 f(x) - f(x)$ no se anule. Resultará, por tanto, que si $E_2 f(x)$ y $f(x)$ tienen el mismo signo, entonces

$$\varphi(x+u) > \varphi(x)$$

la función $\varphi(x)$ es creciente; mientras que cuando $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tengan distinto signo, se verificará

$$\varphi(x+u) < \varphi(x)$$

que la función es decreciente.

Teorema V.—*Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene sólo dos raíces reales comprendidas entre los valores α y $\beta > \alpha$ del mismo signo, y además la ecuación $E_2 f(x) = 0$ no tiene raíz alguna entre dichos límites, se verificará la desigualdad*

$$\frac{\alpha \,.\, E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} < \frac{\beta \,.\, E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)} . \qquad \text{(Corral.)}$$

Sean x' y x'' las raíces de $f(x) = 0$ comprendidas entre α y β, formándose así la serie de valores de x

$$\alpha \qquad x' \qquad (\Upsilon) \qquad x'' \qquad \beta$$

Entre x' y x'' la función $E_1 f(x)$ habrá de anularse una vez ó un número impar de veces [teorema I del § 19]. Pero según el teorema III anterior, como entre x' y x'' la euleriana $E_2 f(x)$ no se reduce á cero, la función $E_1 f(x)$ no podrá anularse más de una vez en dicho intervalo. Así pues, entre x' y x'' existe una sola raíz de $E_1 f(x) = 0$; tendremos, pues, que $E_1 f(x')$ y $E_1 f(x'')$ son de signos contrarios.

Consideremos los dos casos:

1.º *Que α y β sean positivos.*—Según el lema 1.º del § 17 entre α y x' se tendrá

$$\frac{f(x)}{E_1 f(x)} > 0 \qquad\qquad \frac{E_1 f(x)}{E_2 f(x)} > 0$$

mientras que entre x'' y β

$$\frac{f(x)}{E_1 f(x)} < 0 \qquad\qquad \frac{E_1 f(x)}{E_2 f(x)} < 0$$

es decir, que en ambos intervalos

$$\frac{f(x)}{E_2 f(x)} > 0$$

2.º *Que* α *y* β *sean negativos.* La misma proposición prueba que

$$\text{Entre } \alpha \text{ y } x' \ldots\ldots \frac{f(x)}{E_1 f(x)} < 0 \ldots\ldots \frac{E_1 f(x)}{E_2 f(x)} < 0$$

$$\text{Entre } x'' \text{ y } \beta \ldots\ldots \frac{f(x)}{E_1 f(x)} > 0 \ldots\ldots \frac{E_1 f(x)}{E_2 f(x)} > 0$$

luego también, para los dos intervalos

$$\frac{f(x)}{E_2 f(x)} > 0$$

Decimos ahora que *no anulándose* $E_2 f(x)$ *entre* α *y* β, *la función* $\Psi(x) = E_1 f(x) - f(x)$ *no tendrá raíz alguna en los dos intervalos* α, x' y x'', β.

Entre los números x'' y β, la función $\Psi(x)$ no puede anularse si $\beta > \alpha > 0$; pues de lo contrario

$$\Psi(v) = E_1 f(v) - f(v) = 0 \text{ y resultará } \frac{f(v)}{E_1 f(v)} = 1 \text{ entre } x'' \text{ y } \beta$$

lo que es imposible, según acabamos de probar.

Cuando se tenga $\alpha < \beta < 0$ la función $\Psi(x)$ no se anulará, por idénticas razones, entre α y x'.

Siendo $\beta > \alpha > 0$ podemos también demostrar que $\Psi(x)$ no tiene raíz alguna entre α y x'. Supongamos, en efecto, que existiese un número ζ en este intervalo, tal que

$$\Psi(\zeta) = E_1 f(\zeta) - f(\zeta) = 0.$$

Observando que

$$\Psi(x') = E_1 f(x') - f(x') = E_1 f(x')$$

$$\Psi(x'') = E_1 f(x'') - f(x'') = E_1 f(x'')$$

resultará probada la existencia de una raíz, por lo menos, de $\Psi(x)$ entre x' y x'' ya que según hemos visto $E_1 f(x')$ y $E_1 f(x'')$ son de signos contrarios.

Vemos así que $\Psi(x)$ se anula dos veces, por lo menos, entre α y x'', luego su euleriana

$$E_1 \Psi(x) = E_2 f(x) - E_1 f(x) + E_1 f(x) = E_2 f(x)$$

tendrá una raíz, á lo menos, entre α y x'': lo que es imposible, pues por hipótesis la función $E_2 f(x)$ no se anula en el intervalo α, β.

Si $\alpha < \beta < 0$, probaríamos de un modo análogo que $\Psi(x)$ no tiene raíz alguna entre x'' y β.

Tenemos, en resumen, que en los intervalos α, x' y x'', β las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ son del mismo signo, así como $E_1 f(x) - f(x)$ no pasa por cero; ya sean α y β ambos positivos ó negativos.

Según el teorema anterior, la función $\varphi(x)$ será creciente entre α y x' así como entre x'' y β; luego

$$\varphi(\alpha) < \varphi(x') \qquad \varphi(x'') < \varphi(\beta)$$

Como por otra parte

$$\varphi(x') = x' \qquad \varphi(x'') = x'' \qquad x' < x''$$

resultará

$$\varphi(\alpha) < x' < x'' < \varphi(\beta)$$

conforme al enunciado.

Teorema VI.— *Si la ecuación $E_1 f(x) - f(x)$ tiene una raíz x_1 entre α y β, siendo así que $f(x)$ y $E_2 f(x)$ no se anulan en dicho intervalo y son siempre del mismo signo, entonces para valores de x comprendidos entre α y β la desigualdad*

$$\frac{\alpha \, . \, E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} < \frac{\beta \, . \, E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)}$$

podrá ser cierta, pero deja de subsistir necesariamente cuando se aumente α ó disminuya β en una cantidad conveniente. (Corral.)

Según la hipótesis hecha, la función

$$\varphi(x) = \frac{x \, . \, E_1 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

crecerá en los intervalos α, x_1 y x_1, β.

Considerando la función

$$\varphi(\alpha) - \varphi(x)$$

resulta que irá decreciendo de x_1 á β ó creciendo de β á x_1; mas para $x = x_1$ toma un valor infinito, luego será posible encontrar un número β' en el intervalo x_1, β y tan aproximado á x_1 que tengamos

(3) $$\varphi(\alpha) - \varphi(\beta') > 0.$$

De igual manera podemos observar que la función

$$\varphi(x) - \varphi(\beta)$$

crece en el espacio α, x_1 hasta valer $+\infty$; así es que podrá elegirse la cifra α' muy aproximada á x_1 de modo que

(4) $$\varphi(\alpha') - \varphi(\beta) > 0$$

Las desigualdades (3) y (4) toman las formas

$$\frac{\alpha \cdot E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} > \frac{\beta' \cdot E_1 f(\beta')}{E_1 f(\beta') - f(\beta')}$$

$$\frac{\alpha' \cdot E_1 f(\alpha')}{E_1 f(\alpha') - f(\alpha')} > \frac{\beta \cdot E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)}$$

de conformidad con lo afirmado.

§ 31.—Separación por medio de las eulerianas de la función dada.

Conocido el número exacto de las raíces de una ecuación real es preciso llegar á *separarlas* de tal modo que cada una de ellas resulte comprendida entre dos cantidades. Este problema de la separación de las raíces reales puede resolverse con auxilio de la serie de funciones

(I) $$f(x), \qquad E_1 f(x), \qquad E_2 f(x) \, . \, . \, . \, . \, E_m f(x)$$

El procedimiento explicado á continuación es correlativo ó semejante al método que Fourier dió conocer en su *Analyse des equations*.

Se buscará un límite superior l de las raíces positivas de la

ecuación y otro inferior l' de las raíces negativas, á fin de sustituir en (1) los números crecientes

$$(2) \qquad l', \qquad a, \qquad b, \qquad c \ldots\ldots l$$

comprendidos entre ambos límites y de acuerdo con el teorema I del § 17 deducir el número de raíces de $f(x) = 0$ que existen entre dos términos de la serie (2). Es preciso observar que uno de los números de esta serie ha de ser precisamente cero con objeto de poder aplicar con provecho el precitado teorema; así es, que al hablar de un intervalo cualquiera a, b, se presupone tácitamente que ambos números a y b son al mismo tiempo positivos ó negativos.

Cuando al pasar de $x = a$ hacia $x = b$ la serie (1) no pierde ni gana alguna variación, se puede afirmar entonces que la ecuación $f(x) = 0$ no tiene raíces reales entre los números a y b.

Es conveniente recordar que cuando a y $b > a$ son positivos, la serie de signos de las funciones (1) *gana variaciones* de $x = a$ á $x = b$; pero que si ambos números son negativos entonces la serie de signos (1) *pierde variaciones* en dicho paso; suponiendo desde luego que en ambos casos la ecuación $f(x) = 0$ tiene efectivamente raíces entre a y b.

Si de $x = a$ á $x = b$ la serie (1) gana ó pierde [según el signo de a y b] una variación, la ecuación $f(x) = 0$ tendrá una sola raíz real entre a y b, la cual quedará entonces separada.

En el supuesto de que la serie de signos (1) gane ó pierda dos variaciones al pasar de $x = a$ hasta $x = b$, podrá suceder que $f(x) = 0$ tenga dos raíces reales entre a y b ó que no tenga ninguna; en cuyo último caso [corolario I del § 17] la ecuación dada poseerá dos raíces imaginarias. Podemos indicar el modo de distinguir ambos casos entre sí cuando la pérdida ó ganancia de las dos variaciones tiene lugar en las tres funciones

$$(3) \qquad f(x) \qquad E_1 f(x) \qquad E_2 f(x)$$

primeras de la serie (1). Aplicando el mencionado teorema I del § 17 á las funciones

$$E_2 f(x) \qquad E_3 f(x) \qquad E_4 f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$$

vemos que de $x = a$ á $x = b$ no existe cambio alguno en el número de sus variaciones, luego $E_2 f(x)$ no tiene raíz alguna entre a y b.

Si resultase entonces

$$(4) \qquad \frac{b \cdot E_1 f(b)}{E_1 f(b) - f(b)} \lesseqgtr \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)}$$

podemos asegurar, por el teorema V del número anterior, que $f(x) = 0$ no tiene dos raíces reales entre a y b. Pero cuando la desigualdad precedente no sea satisfecha por a y b, habrá que elegir un número α comprendido entre ellos, calculando seguidamente el signo de $f(\alpha)$, que puede ser distinto ó idéntico al que presentan $f(a)$ y $f(b)$. Cuando $f(\alpha)$ sea de signo contrario á $f(a)$ y $f(b)$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tendrá una raíz real entre a y α, y la otra en el intervalo α, b; ambas raíces quedarán por consiguiente separadas. Pero si $f(\alpha)$ es del mismo signo que $f(a)$ y $f(b)$, sustituiremos en la serie (3) los tres números a, α, b para observar cuál de estos dos intervalos a, α ó α, b es el que puede comprender las dos raíces, por ser el que produce en dicha serie la ganancia ó pérdida de las dos variaciones. A este nuevo intervalo a, α ó α, b se aplicará la desigualdad (4) según hemos explicado, á fin de llegar á conocer, después de algunos tanteos, la naturaleza (real ó imaginaria) de las dos raíces, así como obtener su separación si son reales. Suponemos, desde luego, que la ecuación sobre la cual se opera no tiene raíces iguales, pues cuando tal caso se presente, por medio de los teoremas y procedimientos del § 13, podremos conseguir llegar á una ó varias transformadas que cumplan con tal condición.

Llamemos $\pm \nabla_n$ el número de variaciones ganadas ó perdidas por la serie

$$E_n f(x) \qquad E_{n+1} f(x) \ldots\ldots E_{m-1} f(x) \qquad E_m f(x)$$

cuando se pase de $x = a$ á $x = b$. Si a y b son positivos, se ganarán variaciones y el número ∇_n, llamando *índice* de $E_n f(x)$, estará afectado del signo $+$; cuando por el contrario a y b sean negativos entonces el signo correspondiente á ∇_n será el —, pues las variaciones serán perdidas.

El índice de $f(x)$ se designa por $\pm \nabla_0$, mientras que el de $E_m f(x)$ será cero, por cuanto dicha función es una cantidad constante de signo invariable.

Podremos así formar la serie de índices

(5) $\pm \nabla_0, \quad \pm \nabla_1, \quad \pm \nabla_2 \cdot\cdot \;\cdot\cdot \pm \nabla_{m-1}, \quad 0$

correspondiente á un intervalo cualquiera a, b y en la cual dos términos consecutivos son iguales entre sí ó no difieren más que en una unidad; es decir, que entre $\pm \nabla_h$ y $\pm \nabla_{h+1}$ sólo pueden ocurrir una de estas tres relaciones

(6) $\pm \nabla_h = \pm \nabla_{h+1} \qquad \pm \nabla_h = \pm \nabla_{h+1} \pm 1 \qquad \pm \nabla_h = \pm \nabla_{h+1} \mp 1$

Ya dijimos que cuando $\pm \nabla_0 = 0$ la ecuación dada $f(x) = 0$ no tiene raíz alguna entre a y b.

Consideremos ahora el caso de que $\pm \nabla_0$ valga ± 1; la ecuación $f(x) = 0$ tendrá una raíz real x' entre a y b. En tal supuesto podemos reducir el intervalo a, b hasta conseguir que $\pm \nabla_1 = 0$; pues siendo la ecuación dada de raíces simples, su euleriana $E_1 f(x)$ no podrá anularse con ella para el mismo valor de x, así es que de tener también una raíz entre a y b será ésta diferente á la x' de $f(x) = 0$, razón por la cual encontraremos otros dos números a', b' que comprendan á x' pero no á la raíz de $E_1 f(x) = 0$, lo que implica entonces la igualdad $\pm \nabla_1 = 0$.

Estudiemos el caso general de ser $\pm \nabla_0 \overline{\overline{>}} \pm 2$ y supongamos que recorriendo la serie (5) de izquierda á derecha el primer índice que encontremos igual á la unidad sea $\pm \nabla_n$. Es evidente que si por un procedimiento especial de reducción del intervalo a, b conseguimos que el índice $\pm \nabla_n = \pm 1$ retroceda hacia la izquierda en la serie (5) hasta adquirir el primer lugar, entonces $\pm \nabla_0 = \pm 1$ y la raíz considerada resulta así comprendida ella sola en un espacio a', b'; habremos obtenido, por tanto, la resolución del problema de *separación* de las raíces de $f(x) = 0$.

Si el primer índice de la serie (5) *igual á* ± 1 *es* $\pm \nabla_n$, *entonces necesariamente* $\pm \nabla_{n-1} = \pm 2$. En virtud de las igualdades (6) sólo cabe que se tenga

$$\pm \nabla_{n-1} = \pm 1, \qquad \pm \nabla_{n-1} = 0, \qquad \pm \nabla_{n-1} = \pm 2$$

Según la hipótesis hecha no es posible que $\pm \nabla_{n-1}$ sea igual á ± 1, pues ya lo es $\pm \nabla_n$. Caso de que se tuviese

$$\pm \nabla_{n-1} = 0$$

como los números de la serie (5) son decrecientes de un modo con-

tinuo, tendríamos entonces que antes de $\pm \nabla_n$ existiría en (5) un término igual ± 1; lo que es contra el supuesto. Así, pues, necesariamente

$$\pm \nabla_{n-1} = \pm 2$$

Siendo $\pm \nabla_n = \pm 1$ podremos hacer que $\pm \nabla_{n+1} = 0$ eligiendo entre a y b otros dos números a' y b' que no comprendan raíz algûna de la ecuación $E_{n+1} f(x) = 0$. Tendremos entonces la serie de tres intervalos

$$a \qquad a' \qquad b' \qquad b$$

á considerar. El primero a, a' y el tercero b', b no contienen ninguna raíz de $E_n f(x) = 0$, de modo que para cada uno de ellos el índice $\pm \nabla_n$ vale 0; esto nos prueba que el primer índice ± 1 ha retrocedido en (5) hacia la izquierda. El segundo intervalo a', b' posee una raíz de $E_n f(x) = 0$; pero al sustituir en (1) sus límites a' y b' puede darnos una nueva serie (5) en la cual $\pm \nabla_n$ no sea ya el primer índice igual á ± 1, en cuyo caso habremos conseguido el retroceso de ± 1 hacia la izquierda de dicha serie (5). Cuando, por el contrario, en la serie (5) correspondiente al intervalo a', b' persista $\pm \nabla_n$ en ser el primer índice igual ± 1, entonces se verificarán simultáneamente las igualdades

$$\pm \nabla_{n-1} = \pm 2 \qquad \pm \nabla_n = \pm 1 \qquad \pm \nabla_{n+1} = 0$$

que definen un caso particular que vamos á tratar con detenimiento.

Por ser $\pm \nabla_{n-1} = \pm 2$, la ecuación $E_{n-1} f(x) = 0$ tendrá entre a' y b' dos raíces reales ó ninguna; pudiéndose averiguar cuál de los dos extremos es el verdadero por medio de la desigualdad (4) y del procedimiento antes explicado. Este método servirá para separar las dos raíces de $E_{n-1} f(x) = 0$ cuando sean reales y desiguales, pues da el modo de encontrar un número β entre a' y b' tal que una de las raíces estará comprendida en el intervalo a', β y la otra se encontrará entre β y b'. A cada uno de estos dos intervalos a', β y β, b' corresponderá una serie (5) en la que $\pm \nabla_{n-1}$ será igual á ± 1, es decir, que en ellas el índice ± 1, ha retrocedido hacia la izquierda de $\pm \nabla_n$, conforme se deseaba. *Cuando entre a' y b' la ecua-*

ción $E_{n-1} f(x) = 0$ no tenga raíz real alguna, podremos entonces afirmar que cada una de las ecuaciones

$$E_{n-2} f(x) = 0 \qquad E_{n-3} f(x) = 0 \ldots\ldots E_2 f(x) = 0$$

$$E_1 f(x) = 0 \qquad f(x) = 0 \qquad \textbf{(7)}$$

tiene dos raíces imaginarias. Considerando efectivamente la serie de funciones

$$E_{n-2} f(x) \qquad E_{n-1} f(x) \qquad E_n f(x) \qquad E_{n+1} f(x) \ldots\ldots E_m f(x)$$

veremos que en el intervalo a', b' sólo puede ganar ó perder tres ó dos variaciones, es decir, que

$$\pm \nabla_{n-2} = \pm 3 \quad \text{ó bien} \quad \pm \nabla_{n-2} = \pm 2$$

ya que $\pm \nabla_{n-1} = \pm 2$. Si fuese $\pm \nabla_{n-2} = \pm 3$ la ecuación $E_{n-2} f(x) = 0$ tendrá una raíz real entre a' y b' y dos raíces imaginarias [corolario I del § 17]; pues es imposible que tuviese tres raíces reales entre dichos números, ya que en tal supuesto la ecuación $E_{n-1} f(x) = 0$ tendría dos raíces reales en el intervalo a', b', en contra de la hipótesis hecha. De ser $\pm \nabla_{n-2} = \pm 2$ deduciremos también que $E_{n-2} f(x) = 0$ *tiene dos raíces imaginarias* y ninguna real entre a' y b'. Resulta de esta propiedad, extensiva á cada una de las ecuaciones restantes de la serie (7), que en los índices

$$\textbf{(8)} \qquad \pm \nabla_0 \qquad \pm \nabla_1 \qquad \pm \nabla_2 \qquad \pm \nabla_3 \ldots\ldots \pm \nabla_{n-1}$$

existe una parte igual á ± 2 que puede suprimirse, ya que la utilidad de cada índice no es otra que expresar un límite superior del número de raíces reales que la ecuación respectiva tiene en el intervalo dado, siendo así que este sumando común ± 2 representa las dos raíces imaginarias que cada una de las ecuaciones (7) posee. Después de esta supresión se tendrá

$$\pm \nabla_{n-1} = 0$$

es decir, que el índice ± 1 se ha desplazado hacia la izquierda de la serie (5), lo mismo que en todos los casos anteriores.

Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene raíces iguales y resultase que las dos raíces de $E_{n-1} f(x) = 0$ comprendidas entre a' y b' fuesen iguales, entonces será posible á cada uno de los términos de la serie (8)

restarle ± 2, pues dicha raíz doble es de grado $n + 1$ en $f(x) = 0$.

Como ejemplos que ilustren el presente método, presentaremos los dos casos tratados en la obra ya citada de Serret al dar aplicaciones del procedimiento de separación debido á Fourier.

Ejemplo I.—Sea la ecuación

$$x^6 + x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$$

cuyas diversas eulerianas valen

$$E_1\ f(x) = x^5 - 2\,x^4 - 3\,.\,x^3 + 4\,.\,x^2 - 5\,.\,x + 6$$
$$E_2\ f(x) = -2\,.\,x^4 - 6\,x^3 + 12\,.\,x^2 - 20\,.\,x + 30$$
$$E_3\ f(x) = -6\,.\,x^3 + 24\,.\,x^2 - 60\,.\,x + 120$$
$$E_4\ f(x) = 24\,.\,x^2 - 120\,.\,x + 360$$
$$E_5\ f(x) = -120\,.\,x + 720$$
$$E_6\ f(x) = 720$$

Aplicando el teorema I del § 16 se comprueba que $+1$ es un límite inferior de las raíces positivas de la ecuación. Pero la regla de Newton que utiliza la serie de derivadas $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$, $f^{V}(x)$, $f^{VI}(x)$ prueba que $+1$ es también límite superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$. Luego la ecuación propuesta no tiene raíces reales positivas.

El teorema III del § 16 confirma que -1 es un límite superior de las raíces negativas, mientras que la anterior regla de Newton indica que -1 es límite inferior de las mismas raíces.

Luego la ecuación dada tampoco tiene raíces reales negativas, es decir, que todas sus raíces son imaginarias.

Por otra parte, si admitiésemos los límites $+1$ y -1 dados por la regla de Newton, sustituyendo los números

$$-1, \qquad 0, \qquad +1$$

en la serie de eulerianas, veríamos que en ninguno de estos dos intervalos existe cambio de variaciones, lo que demuestra también que todas las raíces de la ecuación son imaginarias.

Ejemplo II.—Consideremos la ecuación

$$x^6 - 12\,.\,x^5 + 60\,.\,x^4 + 123\,.\,x^2 + 4567\,.\,x - 89012 = 0$$

estudiada por Fourier. Tendremos entonces

$$f(x) = x^6 - 12 \, . \, x^5 + 60 \, . \, x^4 + 123 \, . \, x^2 + 4567 \, . \, x - 89012$$
$$E_1 \, f(x) = - 12 \, . \, x^5 + 120 \, x^4 + 492 \, x^2 + 22835 \, . \, x - 534072$$
$$E_2 \, f(x) = + 120 \, . \, x^4 + 1476 \, x^2 + 91340 \, . \, x - 2670360$$
$$E_3 \, f(x) = 2952 \, x^2 + 274020 \, . \, x - 10681440$$
$$E_4 \, f(x) = 548040 \, . \, x - 32044320 + 2952 \, . \, x^2$$
$$E_5 \, f(x) = + 548040 \, x - 64088640$$
$$E_6 \, f(x) = - 64088640$$

Los teoremas I y III del § 16 comprueban que + 1 y — 1 son respectivamente el límite inferior de las raíces positivas y el superior de las negativas. Así la ecuación dada no tiene raíz real en el intervalo — 1, + 1. Sustituyendo en la serie de eulerianas los valores

$$-10, \qquad -1, \qquad +1, \qquad +10$$

encontraremos el siguiente cuadro de signos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$	$E_4 f(x)$	$E_5 f(x)$	$E_6 f(x)$
— 10	+	+	—	—	—	—	—
— 1	—	—	—	—	—	—	—
+ 1	—	—	—	—	—	—	—
+ 10	+	—	—	—	—	—	—

que demuestra la existencia de una raíz real entre — 1 y — 10, y otra positiva entre + 1 y + 10.

Como la regla de Newton manifiesta que + 10 y — 10 son los límites superior é inferior de las raíces reales de la ecuación, queda probado que existen cuatro raíces imaginarias.

Observación importante.—Cuando los teoremas II y IV del § 16 no permitan encontrar un límite superior de las raíces positivas y otro inferior de las negativas, no es preciso, sin embargo, acudir á la regla de Newton que utiliza las derivadas de la función dada. La investigación puede realizarse empleando únicamente las funciones eulerianas, pues basta para ello cambiar x en $\frac{1}{x}$ y encontrar con auxilio de los teoremas I y III del § 16 un límite inferior de las raíces positivas y el superior de las raíces negativas de la ecuación transformada, descartando evidentemente en ambos casos la

solución cero. Si en los dos ejemplos precedentes citamos la regla de Newton, fué por ser la utilizada en la obra de Serret al tratar las dos ecuaciones anteriores, y porque así de este modo se abreviaba la exposición de nuestro procedimiento.

Cambiando x en $\frac{1}{x}$ la primera de las ecuaciones anteriores se transforma en

$$\varphi(x) = x^6 - x^5 + x^4 - x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

luego

$$E_1\,\varphi(x) = -x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 4 \,.\, x^2 + 5 \,.\, x + 6$$
$$E_2\,\varphi(x) = 2x^4 - 6\ \ x^3 - 12 \,.\, x^2 + 20 \,.\, x + 30$$
$$E_3\,\varphi(x) = -6x^3 - 24x^2 + 60 \,.\, x + 120$$
$$E_4\,\varphi(x) = -24 \,.\, x^2 + 120 \,.\, x + 360$$
$$E_5\,\varphi(x) = 120 \,.\, x + 720$$
$$E_6\,\varphi(x) = 720$$

siendo fácil comprobar que $+1$ es un límite inferior de las raíces positivas de $\varphi(x) = 0$, luego $\frac{1}{+1} = +1$ serán también límite superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$. Como para $x = +1$ las funciones

$$\varphi(-x) \qquad E_1\,\varphi(-x) \qquad E_2\,\varphi(-x) \qquad E_3\,\varphi(-x)$$
$$E_4\,\varphi(-x) \qquad E_5\,\varphi(-x) \qquad E_6\,\varphi(-x)$$

son todas positivas, el número -1 será un límite superior de las raíces negativas de $\varphi(x) = 0$, por lo cual $\frac{1}{-1} = -1$ será á su vez límite inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$.

Idéntico cambio de x por $\frac{1}{x}$ produce en la segunda ecuación las siguientes funciones

$$\Psi(x) = -89012 \,.\, x^6 + 4567 \,.\, x^5 + 123 \,.\, x^4 + 60 \,.\, x^2 - 12 \,.\, x + 1$$
$$E_1\,\Psi(x) = 4567 \,.\, x^5 + 246 \,.\, x^4 + 240 \,.\, x^2 - 60 \,.\, x + 6$$
$$E_2\,\Psi(x) = 246 \,.\, x^4 + 720 \,.\, x^2 - 240 \,.\, x + 30$$
$$E_3\,\Psi(x) = 1440 \,.\, x^2 - 720 \,.\, x + 120$$
$$E_4\,\Psi(x) = -1440 \,.\, x + 360 + 1440 \,.\, x^2$$
$$E_5\,\Psi(x) = -1440 \,.\, x + 720$$
$$E_6\,\Psi(x) = 720$$

Como todas ellas son positivas para $x = 0 . 1$, deduciremos que este número es un límite inferior de las raíces positivas de $\Psi(x) = 0$, luego $\frac{1}{0 . 1} = + 10$ será límite superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$.

Para $x = + 0 . 1$ esta misma serie de funciones, previamente transformadas en $- x$, toma valores positivos, lo que demuestra es $- 0 . 1$ límite superior de las raíces negativas de $\Psi(x) = 0$, luego $\frac{1}{- 0 . 1} = - 10$ es el límite inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$.

Vemos así que con nuestra serie de eulerianas se llega al mismo resultado que se deduce aplicando la regla de Newton.

Ejemplo III.—Sea la ecuación

$$f(x) = x^4 + x^3 - 4 x^2 - 4 x + 1 = 0$$

á cuya transformada en $\frac{1}{x}$

$$\varphi(x) = x^4 - 4 x^3 - 4 x^2 + x + 1 = 0$$

le aplicaremos nuestros teoremas I y III del § 16 formando la serie

$$\begin{aligned} E_1 \varphi(x) &= - 4 x^3 - 8 x^2 + 3 . x + 4 \\ E_2 \varphi(x) &= - 8 x^2 + 6 x + 12 \\ E_3 \varphi(x) &= 6 x + 24 \\ E_4 \varphi(x) &= 24 \end{aligned}$$

que se hace positiva toda para $x = 0 . 5$ y $x = - 0 . 5$; luego $\frac{1}{0 . 5} = + 2$ es límite superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$, mientras que $- \frac{1}{0 . 5} = - 2$ es el límite inferior de las raíces negativas de dicha misma ecuación.

Formaremos, pues, la serie

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + x^3 - 4 x^2 - 4 x + 1 \\ E_1 f(x) &= x^3 - 8 x^2 - 12 . x + 4 \\ E_2 f(x) &= - 8 . x^2 - 24 . x + 12 \\ E_3 f(x) &= - 24 . x + 24 \\ E_4 f(x) &= 24 \end{aligned}$$

en donde sustituiremos los números

$$-2, \qquad -1, \qquad 0, \qquad +1, \qquad +2,$$

obteniéndose el cuadro de signos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$	$E_4 f(x)$
-2	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
-1	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$+1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$+2$	$+$	$-$	$-$	$-$	$+$

que demuestra la existencia de una raíz real entre $+1$, $+2$ y de otra entre 0 y $+1$. Como al pasar x de -2 á -1 se pierden dos variaciones, habrá que averiguar si en este intervalo existen ó no raíces reales de la ecuación; la serie correspondiente de índices vale

$$-2, \qquad -1, \qquad 0, \qquad 0, \qquad 0$$

teniéndose

$$f(-1) = 1 \qquad\qquad f(-2) = 1$$
$$E_1 f(-1) = 7 \qquad\qquad E_1 f(-2) = -12$$

lo que hace

$$\frac{-2 \,.\, E_1 f(-2)}{E_1 f(-2) - f(-2)} = -\frac{24}{13} < \frac{-1 \,.\, E_1 f(-1)}{E_1 f(-1) - f(-1)} = -\frac{7}{6}$$

cuyo resultado, contrario á la desigualdad (4), demuestra que el intervalo -1, -2 es demasiado grande para poder reconocer la naturaleza de las raíces de la ecuación. Para disminuir dicho intervalo elegiremos el número -1.5 comprendido entre -1 y -2; como

$$f(-1.5) \text{ es de signo } -$$

resultará que hay una raíz negativa entre -1 y -1.5, así como otra entre -1.5 y -2. Las raíces de la ecuación quedan así completamente separadas.

Ejemplo IV.—Reconsiderando la ecuación

$$x^5 - 5x^4 - 16x^3 + 12x^2 - 9x - 5 = 0$$

ya tratada en el § 17, recordaremos que tiene tres raíces reales comprendidas en cada uno de los intervalos

-3 y -2; -1 y 0; $+7$ y $+8$.

Según ya vimos, al pasar la variable x del valor 1 al 7 la serie de funciones

	$f(x)$,	$E_1 f(x)$,	$E_2 f(x)$,	$E_3 f(x)$,	$E_4 f(x)$,	$E_5 f(x)$
$x = 1$	—	—	—	—	—	—
$x = 7$	—	—	—	+	—	—

gana dos variaciones, razón por la cual es preciso investigar si existen dos raíces reales entre 1 y 7, ó es que la ecuación dada posee dos raíces imaginarias.

La serie correspondiente de los índices es

$$2, \quad 2, \quad 2, \quad 1, \quad 0, \quad 0$$

debiendo aplicarse la relación (4) á las funciones $E_2 f(x)$ y $E_3 f(x)$. Así tendremos

$$E_2 f(1) = -168 \qquad E_2 f(7) = -8301$$
$$E_3 f(1) = -444 \qquad E_3 f(7) = +1716$$

por lo que

$$\frac{1 \cdot E_3 f(1)}{E_3 f(1) - E_2 f(1)} = \frac{-444}{-276} = \frac{37}{23}$$

$$\frac{7 \cdot E_3 f(7)}{E_3 f(7) - E_2 f(7)} = \frac{12012}{10020} = \frac{1001}{835}$$

siendo fácil comprobar que

$$\frac{1 \cdot E_3 f(1)}{E_3 f(1) - E_2 f(1)} > \frac{7 \cdot E_3 f(7)}{E_3 f(7) - E_2 f(7)}$$

cuyo resultado, de conformidad con la desigualdad (4), nos demuestra que $E_2 f(x)$ no tiene raíces reales entre 1 y 7; es decir, que $f(x) = 0$ tiene dos raíces imaginarias.

§ 32.—Otro método para la separación de las raíces.

El problema de la separación de las raíces reales de una ecuación numérica puede resolverse de un modo fácil y completo utilizando el teorema I del § 21. Supongamos que por el procedimiento allí explicado se haya deducido la serie de funciones

(1) $f(x) \quad E_1 f(x) \quad X_1 \quad X_2 \ldots\ldots X_n$

Dando á x los valores crecientes

(2) $l' \quad a \quad b \quad c \ldots\ldots l$

en donde figura 0 y

l' = límite inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$,
l = límite superior de las raíces positivas de $f(x) = 0$,

dicho teorema nos dará á conocer el número exacto de raíces reales de $f(x) = 0$ que existen entre dos términos consecutivos de la serie (2). Cuando en uno de estos intervalos no exista más que una raíz, es evidente que habremos realizado la separación de ella. Pero si hubiese entre tales términos más de una raíz de $f(x) = 0$, se sustituirán números intermediarios hasta conseguir necesariamente dicha separación; que será obtenida cuando cada raíz tiene dos números (superior é inferior) entre los cuales se encuentra comprendida, sin que en este intervalo exista más ninguna otra raíz de la ecuación dada.

Caso de conocer previamente que todas las raíces de $f(x) = 0$ son reales, la serie (1) puede sustituirse por la

(3) $f(x) \quad E_1 f(x) \quad E_2 f(x) \ldots\ldots E_{m-1} f(x) \quad E_m f(x)$

pues, según el corolario II del § 17, la diferencia entre el número de variaciones que la serie (3) presenta para $x = a$ y $x = b$ (a y b del mismo signo) es exactamente el número de raíces reales de la ecuación comprendidas entre ambos límites. La serie (3) es muchísimo más fácil de formar que la serie (1), así es que el cambio mencionado resulta ventajoso.

El procedimiento descrito no solamente separa las raíces reales de $f(x) = 0$, sino que también permite calcular cada raíz con un grado de aproximación cualquiera.

Ejemplo I.—Consideremos la ecuación clásica

$$f(x) = x^3 - 7x + 7 = 0$$

con la cual y su euleriana

$$E_1 f(x) = -14x + 21 \text{ ó } -2x + 3$$

realizaremos las operaciones indicadas, encontrando la serie de tres funciones

$$
(4) \qquad \begin{cases} f(x) = x^3 - 7x + 7 \\ E_1 f(x) = -2x + 3 \\ X_1 = +1 \end{cases}
$$

Para calcular el límite superior de las raíces positivas de la ecuación tendremos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 7x + 7 \\
E_1 f(x) &= -14x + 21 \\
E_2 f(x) &= -14 . x + 42 \\
E_3 f(x) &= 42
\end{aligned}
$$

y como $x = 0.5$ hace positivas á

$$
\varphi(x) = 7x^3 - 7x^2 + 1, \quad E_1 \varphi(x) = -7x^2 + 3, \quad E_2 \varphi(x) = 6, \quad E_3 \varphi(x) = 6
$$

entonces $\frac{1}{0.5} = 2$ será el límite buscado [teorema I del § 16]. De igual modo

$$
\begin{aligned}
\varphi(-x) &= -7 . x^3 - 7a^2 + 1 \\
E_1 \varphi(-x) &= -7x^2 + 3 \\
E_2 \varphi(-x) &= 6 \\
E_3 \varphi(-x) &= 6
\end{aligned}
$$

y observando que $+ 0.25$ hace positivas á estas tres funciones, deduciremos [teorema III del § 16] que $-\frac{1}{0.25} = -4$ es un límite inferior de las raíces negativas de la ecuación.

Sustituyendo en la serie (4) los números

$$
-4, \qquad -3, \qquad 0, \qquad 1, \qquad 2
$$

tendremos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	X_1
-4	$-$	$+$	$+$
-3	$+$	$+$	$+$
0	$+$	$+$	$+$
$+1$	$+$	$+$	$+$
$+2$	$+$	$-$	$+$

es decir, que las tres raíces son reales: una negativa comprendida entre — 4 y — 3; dos positivas entre + 1 y + 2. La separación de estas dos últimas se consigue haciendo $x = 1 . 5$, en cuyo caso

$$f(1 . 5) < 0 \qquad E_1 f(1 . 5) = 0 \qquad X_1 = 1$$

luego una de las raíces estará en el intervalo + 1, + 1 . 5, mientras que la otra será comprendida entre + 1 . 5 y + 2.

Ejemplo II.—Sea la ecuación

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

por lo cual

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= x^3 - 2x - 5 \\ E_1 f(x) &= -6x - 15 \text{ ó } -2x - 5 \\ X_1 &= +125 \end{aligned} \right.$$

Calculando las trasformadas en $\frac{1}{x}$ tendremos

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 1 - 2x^2 - 5 . x^3 \\ E_1 \varphi(x) &= -2x^2 + 3 \\ E_2 \varphi(x) &= 6 \\ E_3 \varphi(x) &= 6 \end{aligned}$$

y como $x = 0 . 4$ hace positivas á estas cuatro funciones, resultará que $\frac{1}{0 . 4} = 2 . 5$ es un límite superior de las raíces positivas de la ecuación.

De igual modo las funciones

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= 1 - 2x^2 + 5x^3 \\ E_1 \varphi(-x) &= -2x^2 + 3 \\ E_2 \varphi(-x) &= +6 \\ E_3 \varphi(-x) &= 6 \end{aligned}$$

se hacen positivas para $x = + 0 . 4$, luego $-\frac{1}{0 \; 4} = - 2 . 5$ es un límite inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$.

Tendremos, por tanto, el siguiente cuadro de signos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	X_1
-2.5	$-$	0	$+$
-2	$-$	$-$	$+$
0	$-$	$-$	$+$
1	$-$	$-$	$+$
2	$-$	$-$	$+$
2.5	$+$	$-$	$+$

que demuestra la existencia de una raíz positiva entre $+2$ y $+2.5$, así como la de dos raíces imaginarias. La ecuación dada no tiene raíces reales negativas.

Ejemplo III.—Consideremos la ecuación

$$x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

pudiéndose entonces deducir

$$f(x) = x^4 - 2 \,.\, x^2 + 3 \,.\, x - 1$$
$$E_1 f(x) = -4x^2 + 9x - 4$$
$$X_1 = -345 \,.\, x + 196$$
$$X_2 = +473779$$

Hallando la transformada en $\frac{1}{x}$ encontraremos

$$\varphi(x) = -x^4 + 3 \,.\, x^3 - 2x^2 + 1$$
$$E_1 \varphi(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4$$
$$E_2 \varphi(x) = -4 \,.\, x^2 + 12$$
$$E_3 \varphi(x) = +24$$
$$E_4 \varphi(x) = 24$$

y como $x = +1$ hace positivas á todas estas funciones, se deducirá que $\frac{1}{1} = +1$ es el límite superior de las raíces positivas de la ecuación supuesta. Al propio tiempo las funciones

$$\varphi(-x) = -x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$$
$$E_1 \varphi(-x) = -3x^3 - 4 \,.\, x^2 + 4$$
$$E_2 \varphi(-x) = -4x^2 + 12$$
$$E_3 \varphi(-x) = 24$$
$$E_3 \varphi(-x) = 24$$

son positivas para $x = +0 \,.\, 33$; luego $-\frac{1}{0 \,.\, 33} = -3$ es un límite inferior de las raíces negativas de $f(x) = 0$.

Haremos, por tanto, las siguientes sustituciones

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	X_1	X_2
— 3	+	—	—	+
— 2	—	—	—	+
0	—	—	+	+
1	+	+	—	+

que nos indican la existencia de dos raíces reales; una positiva comprendida entre 0 y + 1; otra negativa situada en el intervalo — 2, — 3. La ecuación dada tiene, pues, dos raíces imaginarias.

Á este resultado puede también llegarse por medio de la serie de eulerianas

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3x \quad 1$$
$$E_1 f(x) = -4 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 4$$
$$E_2 f(x) = -4x^2 + 18 \cdot x - 12$$
$$E_3 f(x) = +18 \cdot x - 24$$
$$E_4 f(x) = -24$$

en la cual se realizarán las siguientes sustituciones

— 3, — 2, 0, 1, 2

que producen el cuadro de signos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$	$E_4 f(x)$
— 3	+	—	—	—	—
— 2	—		—	—	—
0	—	—	—	—	—
+ 1	+	+	+	—	—
+ 1	+	—	+	—	—

Observando el cambio de variaciones, se confirma la existencia de una raíz negativa entre — 2 y — 3, así como de otra real positiva en el intervalo 0, + 1.

Al pasar de $x = 1$ á $x = 2$, la serie de eulerianas aumenta dos variaciones, lo cual es indicio de que la ecuación dada tiene dos raíces ó no tiene ninguna en dicho intervalo.

Para conocer la verdad veremos que la serie de índices vale

3, 2, 1, 0,

y como

$$E_1\, f(1) = 1 \qquad\qquad E_1\, f(2) = -2$$
$$E_2\, f(1) = 2 \qquad\qquad E_2\, f(2) = 8$$

de donde

$$\frac{E_2\, f(1)}{E_2\, f(1) - E_1\, f(1)} > \frac{2 \,.\, E_2\, f(2)}{E_2\, f(2) - E_1\, f(2)}$$

luego puede asegurarse que la ecuación

$$E_1\, f(x) = 0$$

no tiene ninguna raíz real entre $+1$ y $+2$. De aquí resulta, según ya hemos demostrado, que $f(x) = 0$ tiene dos raíces imaginarias.

Ejemplo IV.—Sea la ecuación

$$x^3 - 2x - 2 = 0$$

con la cual calcularemos

$$f(x) = x^3 - 2x - 2$$
$$E_1\, f(x) = -4x - 6 \text{ ó bien } -2x - 3$$
$$X_1 = +19$$

Es fácil comprobar, según las reglas establecidas y aplicadas anteriormente, que $+2$ es el límite superior de las raíces positivas de la ecuación dada. Así es que tendremos el siguiente cuadro de signos:

x	$f(x)$	$E_1\, f(x)$	X_1
$-\infty$	$-$	$+$	$+$
0	$-$	$-$	$+$
$+1$	$-$	$-$	$+$
$+2$	$+$	$-$	$+$

que demuestra la existencia de una sola raíz real comprendida entre $+1$ y $+2$. Como $f(x) = 0$ no tiene raíces negativas, poseerá necesariamente dos raíces imaginarias.

Hallando la serie de eulerianas

$$f(x) = x^3 - 2 . x - 2$$
$$E_1 f(x) = - 4 . x - 6$$
$$E_2 f(x) = - 4 x - 12$$
$$E_3 f(x) = - 12$$

tendremos

x	$f(x)$	$E_1 f(x)$	$E_2 f(x)$	$E_3 f(x)$
$+ \infty$	$-$	$+$	$-$	$-$
$- 2$	$-$	$+$	$-$	$-$
$- 1$	$-$	$-$	$-$	$-$
0	$-$	$-$	$-$	$-$
$+ 1$	$-$	$-$	$-$	$-$
$+ 2$	$+$	$-$	$-$	$-$

Entre $- \infty$ y $- 2$ no existe raíz real alguna, así como tampoco en el intervalo doble $- 1$, $+ 1$: se comprueba al mismo tiempo que la ecuación estudiada tiene una raíz positiva entre $+ 1$ y $+ 2$.

Como al pasar de $- 2$ á $- 1$ hay una disminución de dos variaciones, escribiremos los índices

$$- 2, \qquad - 1, \qquad 0 \qquad .$$

por lo cual, como

$$f(- 2) = - 6 \qquad\qquad f(- 1) = - 1$$
$$E_1 f(- 2) = 2 \qquad\qquad E_1 f(- 1) = - 2$$

se verificará que

$$\frac{- 2 . E_1 f(- 2)}{E_1 f(- 2) - f(- 2)} > \frac{- 1 . E_1 f(- 1)}{E_1 f(- 1) - f(- 1)}$$

luego $f(x) = 0$ no tiene raíz real alguna entre $- 2$ y $- 1$, poseyendo en cambio dos raíces imaginarias.

CAPÍTULO VI

Cálculo de las raíces reales.

---

§ 33.—Proposición preliminar.

Teorema I.—*Cuando una ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz comprendida entre dos números de igual signo α y $\beta > \alpha$ lo suficientemente próximos para que las eulerianas $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$ no se anulen en dicho intervalo, la función*

$$\varphi(x) = E_1 f(x) - f(x)$$

no tendrá raíz alguna entre α y $\beta > \alpha$. (Corral.)

Sea x_0 la raíz de $f(x) = 0$ comprendida entre $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ formándose así la serie

$$\alpha \qquad x_0 \qquad \beta$$

Probemos ante todo que $\varphi(x)$, para valores de x comprendidos entre $\alpha > 0$ y $x_0 > 0$, tiene el mismo signo que $f(x)$, mientras que en el intervalo x_0, β las funciones $\varphi(x)$ y $f(x)$ son de signos contrarios. Tenemos efectivamente

$$\varphi(x) = E_1 f(x) - f(x) = (m-1) \cdot f(x) - x \cdot f'(x)$$

y como según propiedad conocida $f'(x)$ tiene signo contrario á $f(x)$ en el espacio α, x_0, resultará que $- x \cdot f'(x)$ será del mismo senti-

do que $f(x)$, luego $\varphi(x)$ y $f(x)$ poseen el mismo signo entre α y x_0. La diferencia

$$E_1 f(x) - f(x)$$

entre x_0 y β es de signo contrario á $f(x)$, por cuanto según sabemos la función $E_1 f(x)$ es de diferente signo que $f(x)$ en dicho intervalo.

De suponer que α y β fuesen negativos, se desmostraría de un modo semejante que $\varphi(x)$ y $f(x)$ son entonces de signos contrarios entre α y x_0, y del mismo sentido entre x_0 y β.

Resultará, por tanto, que siendo α y β de igual signo, tendremos

$$\varphi(\alpha) \cdot f(\alpha) \gtrless 0$$

$$\varphi(\beta) \cdot f(\beta) \lessgtr 0$$

luego

$$-\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) \cdot f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$$

y como por hipótesis

$$-f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$$

deduciremos por tanto que

$$\varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta) > 0$$

Siendo $\varphi(\alpha)$ y $\varphi(\beta)$ del mismo signo, la función $\varphi(x)$ no tendrá raíz alguna entre α y β ó tendrá un número par de ellas, dos por lo menos. Veamos cómo esto último es imposible.

Sabemos que la función $E_1 f(x)$ es de grado $(m - 1)$, luego entonces, según la regla dada para calcular la euleriana de una suma de varias funciones

$$E_1 \varphi(x) = E_1 [E_1 f(x) - f(x)] = E_2 f(x) - E_1 f(x) + E_1 f(x) = E_2 f(x)$$

ya que $f(x)$ es de grado m.

Anulándose dos veces la función $\varphi(x)$ entre los números α y β del mismo signo, su euleriana $E_1 \varphi(x) = E_2 f(x)$ tendrá una raíz entre ellos [teorema I del § 19]; resultado imposible, pues se supone que $E_2 f(x)$ no se anula entre α y β.

§ 34.—Método de aproximación basado en las funciones eulerianas.

Obtenida la separación de las raíces reales de la ecuación numérica dada, queda por realizar el cálculo de las mismas, reduciendo progresivamente los dos límites entre los cuales cada una de ellas se encuentra encerrada.

El valor exacto de la raíz buscada está comprendido entre los dos números a y b del mismo signo; ambos positivos ó negativos.

Para mayor claridad en la exposición, se consideran los dos casos:

1.° *Que a y b sean positivos.*

El valor exacto de la raíz será

$$x_0 = a + h = b - h'$$

en donde

$$h > 0 \qquad h' > 0 \qquad h' < b.$$

Siendo $f(x) = 0$ de grado m tendremos

$$0 = f(a+h) = f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^m + E_1 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{a} + $$
$$+ E_2 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{2 \cdot a^2} - \ldots\ldots$$

$$0 = f(b-h') = f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^m + E_1 f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-1} \cdot \frac{h'}{b} + $$
$$+ E_2 f(b) \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-2} \cdot \frac{h'^2}{2 \cdot b^2} + \ldots\ldots$$

de donde deducimos

$$\frac{h}{a} = \frac{f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)}{E_1 f(a)} + \frac{E_2 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{2 \cdot a^2}}{E_1 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-1}} -$$
$$- \frac{E_3 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3}}{E_1 f(a) \cdot \left(1 + \frac{h}{a}\right)^{m-1}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{h'}{b} = -\frac{f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)}{E_1 f(b)} - \frac{E_2 f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-2} \cdot \frac{h'^2}{2 \cdot b^2}}{E_1 f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-1}} -$$

$$- \frac{E_3 f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-3} \cdot \frac{h'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b^3}}{E_1 f(b) \cdot \left(1 - \frac{h'}{b}\right)^{m-1}} - \ldots\ldots$$

Restando respectivamente de ambas igualdades

$$\frac{f(a)}{E_1 f(a)} \cdot \frac{h}{a} \qquad \text{y} \qquad \frac{f(b)}{E_1 f(b)} \cdot \frac{h'}{b}$$

y multiplicando después los dos miembros de cada una de ellas por

$$\frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad \text{y} \qquad \frac{b \cdot E_1 f(b)}{E_1 f(b) - f(b)}$$

quedará en definitiva

$$(I) \begin{cases} h = \dfrac{a \cdot f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} + \dfrac{a \cdot E_2 f(a) \cdot \frac{h^2}{2 \cdot a^2}}{\left(- + \frac{h}{a}\right) \cdot [E_1 f(a) - f(a)]} - \ldots\ldots \\ h' = - \dfrac{b f(b)}{E_1 f(b) - f(b)} - \dfrac{b \cdot E_2 f(b) \cdot \frac{h'^2}{2 b^2}}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right) \cdot [E_1 f(b) - f(b)]} - \ldots\ldots \end{cases}$$

Llamaremos para más facilidad

$$(1') \quad \alpha = \frac{a \cdot f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad \alpha' = - \frac{b \cdot f(b)}{E_1 f(b) - f(b)} \quad (1'')$$

$$\beta = + \frac{a \cdot E_2 f(a) \cdot \frac{h^2}{2 \; a^2}}{\left(1 + \frac{h}{a}\right) \cdot \left[E_1 f(a) - f(a)\right]} -$$

$$- \frac{a \cdot E_3 f(a) \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a^3}}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2 \cdot \left[E_1 f(a) - f(a)\right]} + \ldots\ldots$$

$$\beta' = - \frac{b \cdot E_2 f(b) \cdot \frac{h'^2}{2 \cdot b^2}}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right) \cdot \left[E_1 f(b) - f(b)\right]} -$$

$$- \frac{b \cdot E_3 f(b) \cdot \frac{h'^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot b^3}}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right)^2 \cdot \left[E_1 f(b) - f(b)\right]} - \ldots .$$

Hacemos la hipótesis de que a y b son tan próximos uno al otro que no comprenden raíz alguna de $E_1 f(x) = 0$ ni de $E_2 f(x) = 0$.

Desarrollando las fracciones

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)} \qquad \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^2} \qquad \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{a}\right)^3} \ldots .$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right)} \qquad \frac{1}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right)^2} \qquad \frac{1}{\left(1 - \frac{h'}{b}\right)^3} \ldots .$$

según las potencias ascendentes de h y h', es fácil ver que los signos de β y de β' son respectivamente los que tienen sus primeros términos

$$(2) \qquad \frac{a \cdot E_2 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad \text{y} \qquad - \frac{b \cdot E_2 f(b)}{E_1 f(b) - f(b)} \qquad (3)$$

por ser h y h' cantidades pequeñas.

Según la hipótesis anterior, las cantidades $E_2 f(a)$ y $E_2 f(b)$ son de un mismo signo, así como también $E_1 f(a)$ y $E_1 f(b)$.

Como a es un valor aproximado por defecto á la raíz y b lo es por exceso, las cantidades h y h' así como α y α' tendrán por naturaleza que ser positivas; esto exige que $E_1 f(a) - f(a)$ sea del mismo signo que $f(a)$, mientras que $E_1 f(b) - f(b)$ tendrá signo contrario á $f(b)$. Propiedad que fué ya demostrada, por otro procedimiento, en el número anterior y que conduce á probar *que* β y β' *son siempre de signos contrarios*, por cuanto las cantidades (2) y (3) también lo son, desde el momento que

$E_1 f(a) - f(a)$	y	$E_1 f(b) - f(b)$	del mismo signo
$E_2 f(a)$	y	$E_2 f(b)$	del mismo signo.

El método de aproximación que nos ocupa consiste en tomar

para valores de h y h' los números α y α' calculados por las fórmulas (1') y (1''); es decir, que haremos

$$(4) \qquad x_0 = a + \frac{a \cdot f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} = \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)}$$

ó bien

$$(5) \qquad x_0 = b + \frac{b \cdot f(b)}{E_1 f(b) - f(b)} = \frac{b \cdot E_1 f(b)}{E_1 f(b) - f(b)}$$

Veamos ahora cual de las dos igualdades (4) ó (5) es más conveniente usar, indicando aquélla que dé el valor más aproximado al exacto x_0.

A) Supongamos que $f(a)$ y $E_2 f(a)$ son de un mismo signo.

Tendremos entonces

$$\alpha > 0 \qquad \beta > 0 \qquad \alpha' > 0 \qquad \beta' < 0$$

siendo los valores aproximados

$$a + \alpha \qquad \text{y} \qquad b - \alpha'$$

y el valor exacto de la raíz

$$a + \alpha + \beta = b - \alpha' - \beta'$$

por lo que evidentemente

$$(6) \qquad \begin{cases} a < a + \alpha < a + \alpha + \beta & (\alpha > 0\,,\ \beta > 0) \\ b > b - \alpha' < b - \alpha' - \beta' & (\alpha' > 0\,,\ \beta' < 0) \end{cases}$$

De aquí resulta que el valor (4), ó sea $a + \alpha$, está más aproximado, por defecto, á la raíz que el número a; no ocurriendo lo mismo con el valor (5), ó sea $b - \alpha'$, que está aproximado por defecto, razón por la cual no es posible afirmar que se encuentre más próximo á la raíz que el número b, aproximado por exceso.

En este caso se hará uso de la igualdad (4) que da otro valor más cerca á la raíz pero inferior á ella.

B) Que $f(a)$ y $E_2 f(a)$ son de signos contrarios.

Con tal supuesto, se verificará

$$\alpha > 0 \qquad \beta < 0 \qquad \alpha' > 0 \qquad \beta' > 0$$

siendo entonces evidente que

$$(7) \begin{cases} a < a + \alpha > a + \alpha + \beta \\ b > b - \alpha' > b - \alpha' - \beta' \end{cases}$$

por lo cual no es posible afirmar que el valor (4), ó sea $a + \alpha$, está más aproximado que a hacia la raíz exacta $a + \alpha + \beta$; pero en cambio puede asegurarse que (5), ó sea $b - \alpha'$, se encuentra, por exceso, más cerca de $b - \alpha' - \beta'$, que el número b.

Se utilizará en este caso el valor (5), para el cual $f(b)$ y $E_2 f(b)$ son del mismo signo.

2.º *Que a y b sean negativos* ($b > a$).

Lo mismo que anteriormente se tendrá

$$\alpha > 0 \qquad \alpha' > 0,$$

pues entonces $E_1 f(a) - f(a)$ y $f(a)$ son de signos contrarios, mientras que $E_1 f(b) - f(b)$ y $f(b)$ son del mismo signo. Esto hace que β y β' mantengan siempre signos contrarios.

Si $E_2 f(a)$ y $f(a)$ tienen el mismo signo se verificará

$$\alpha > 0 \qquad \alpha' > 0 \qquad \beta > 0 \qquad \beta' < 0$$

luego las desigualdades (6) y sus consecuencias serán también aquí ciertas.

Cuando $E_2 f(a)$ y $f(a)$ sean de signos diferentes, entonces

$$\alpha > 0 \qquad \alpha' > 0 \qquad \beta' > 0 \quad \beta < 0$$

por lo cual serán aplicables las desigualdades (7) y sus deducciones.

Vemos, pues, que los resultados son absolutamente iguales cualquiera que sea el signo de a y b, pero siempre que ambos sean positivos ó negativos al mismo tiempo.

De aquí el siguiente principio que resume el actual procedimiento:

Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene una raíz comprendida entre los números a y b del mismo signo, se encontrará un valor más aproximado á dicha raíz, empleando la fórmula (4) *cuando $f(a)$ y $E_2 f(a)$ sean del mismo signo, y usando la igualdad* (5) *en el caso de que $f(a)$ y $E_2 f(a)$ tengan signos contrarios.* (Corral.)

Este método de aproximación á las raíces reales de una ecuación numérica es análogo ó correlativo al de Newton, que utiliza para el mismo fin la derivada de la función, siendo así que nosotros empleamos la euleriana de ella.

Operando de conformidad con el presente método se obtiene rápidamente una gran aproximación al valor exacto de la raíz.

Ejemplo I.—Sea la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

una de cuyas raíces positivas se encuentra comprendida entre 1.35 y 1.36.

Queremos encontrar el valor de la raíz con más cifras decimales, aplicando el método descrito. Tenemos para ello

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 7x + 7 & f(1.35) &= + 0.010375 \\ E_1 f(x) &= -14 \cdot x + 21 & E_1 f(1.35) &= 2.1 \\ E_2 f(x) &= -14 \cdot x + 42 & E_2 f(1\ 35) &= 23.52 \end{aligned}$$

y como $f(1.35)$ tiene igual signo que $E_2\, f(1.35)$, adoptaremos el valor (4) poniendo

$$x_0 = \frac{1.35 \cdot E_1\, f(1.35)}{E_1\, f(1.35) - f(1.35)} = \frac{1.35 \times 2.1}{2.1 - 0.010375} = \frac{2.835}{2.089625} = 1.35670$$

Tomaremos por segundo valor aproximado

$$a' = 1.3567$$

ya que $f(a')$ es del mismo signo que $E_2\, f(a')$; entonces

$$\begin{aligned} f(a') &= 0.000289355263 \\ E_1\, f(a') &= 2.0062 \\ E_2\, f(a') &= 21 \end{aligned}$$

luego

$$x_0 = \frac{a'\, E_1\, f(a')}{E_1\, f(a') - f(a')} = \frac{2.72181154}{2.005910644737} = 1.3568:57$$

y así continuaríamos sucesivamente, hasta tener el número de cifras decimales exactas que se quieran.

Ejemplo II.—Consideremos la ecuación

$$x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 10 \cdot x - 4 = 0$$

una de cuya raíces está comprendida entre 0.40 y 0.50. Como para $x = 0.4$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 2x^3 - 3 \cdot x^2 + 10x - 4 & f(0.4) &= -0.5824 \\ E_1\, f(x) &= -2x^3 - 6 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 16 & E_1\, f(0.4) &= -5.088 \\ E_2\, f(x) &= -6x^2 + 60 \cdot x - 48 & E_2\, f(0.4) &= -24.96 \end{aligned}$$

las funciones $f(0.4)$ y $E_2 f(0.4)$ son del mismo signo, adoptaremos el valor dado por la fórmula (4). Resulta así

$$x_0 = \frac{0.4 \times E_1 f(0.4)}{E_1 f(0.4) - f(0.4)} = \frac{2.0352}{4.5056} = 0.45$$

Haciendo ahora

$$a' = 0.45$$

como valor más aproximado por defecto á la raíz, tendremos

$$f(0.45) = -0.24874375$$
$$E_1 f(0.45) = -3.89725$$

por lo cual

$$x_0' = \frac{0.45 \times E_1 f(0.45)}{E_1 f(0.45) - f(0.45)} = \frac{1.7537625}{3.64850625} = 0.480$$

Adoptando este valor aun más aproximado

$$a'' = 0.480$$

nos resultará

$$f(0.48) = -0.05929984$$
$$E_1 f(0.48) = -3.203584$$

de donde

$$x_0'' = \frac{0.48 \times E_1 f(0.48)}{E_1 f(0.48) - f(0.48)} = \frac{1.53772032}{3.14428416} = 0.4890$$

Otra nueva aproximación nos dará

$$a''' = 0.489$$

$$f(0.489) = -0.004044485359 \qquad E_1 f(0.489) = -2.998586338$$

$$x'''_0 = \frac{0.489 \times E_1 f(0.489)}{E_1 f(0.489) - f(0.489)} = \frac{1.466308719282}{2.994541852641} = 0.4896604$$

pudiéndose de este modo continuar tan lejos como se quiera.

§ 35.—**Complemento al método anterior.**

El procedimiento desarrollado en el artículo precedente es satisfactorio por su extremada sencillez y porque permite llegar pronto

al valor buscado. Pero, en cambio, aproxima á la raíz siempre en el mismo sentido, por defecto si $f(a)$ y $E_2 f(a)$ son de igual signo, y por exceso cuando dichas mismas cantidades son de signos contrarios. Resulta, pues, que nunca se conoce de antemano el grado de exactitud del último valor hallado, pues para ello es preciso calcular el siguiente y deducir entonces el número de cifras decimales verdaderas que aquel tiene, no quedando así satisfecha la condición que debe imponerse á todo método de aproximación, cual es de que suministre simultáneamente un límite inferior y otro superior de la cantidad cuyo valor se busca.

Del anterior defecto adolece también el método de Newton.

Dicho inconveniente se subsana en el nuestro del modo siguiente.

La ecuación dada

$$f(x) = 0$$

no tiene raíces iguales y además las funciones $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$ no se anulan entre α y $\beta > \alpha$ límites que comprenden la raíz buscada x_0. Los resultados encontrados anteriormente de un modo directo y con auxilio de la fórmula que da el desarrollo de $f(x + h)$ en función de las eulerianas de $f(x)$, pueden confirmarse ahora de un modo más rápido.

Según el teorema I del § 33 la función $E_1 f(x) - f(x)$ no se anula entre α y β cuando tengan lugar las hipótesis precitadas; luego en virtud del teorema IV del § 30 la función

$$\varphi(x) = x + \frac{x f(x)}{E_1 f(x) - f(x)} = \frac{x \,.\, E_1 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

será creciente ó decreciente según que $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tengan el mismo signo ó sean de signos contrarios. Así, pues, cuando para $x = \alpha$ las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tienen el mismo signo, entonces para $x = \beta$ lo tendrán contrario; luego $\varphi(x)$ será creciente de α á x_0 y decrecerá en el intervalo x_0, β, por lo que

$$\varphi(x_0) > \varphi(\alpha) \qquad \varphi(x_0) > \varphi(\beta)$$

desigualdades reveladoras de ser $\varphi(x_0) = x_0$ el valor máximo de $\varphi(x)$.

Tendremos por tanto

$$(\text{I}) \qquad \begin{cases} x_0 > \alpha + \dfrac{\alpha \,.\, f(\alpha)}{E_1\, f(\alpha) - f(\alpha)} = \dfrac{\alpha \,.\, E_1\, f(\alpha)}{E_1\, f(\alpha) - f(\alpha)} \\[2ex] x_0 > \beta + \dfrac{\beta \,.\, f(\beta)}{E_1\, f(\beta) - f(\beta)} = \dfrac{\beta \,.\, E_1\, f(\beta)}{E_1\, f(\beta) - f(\beta)} \end{cases}$$

que son las mismas dos relaciones (6) del número anterior.

Si $f(x)$ y $E_2\, f(x)$ fuesen de signos contrarios para $x = \alpha$, lo tendrían igual para $x = \beta$, y entonces $\varphi(x)$ será decreciente de α á x_0 y creciente de x_0 á β, por lo cual

$$\varphi(x_0) < \varphi(\alpha) \qquad\qquad \varphi(x_0) < \varphi(\beta)$$

ó bien

$$x_0 < \alpha + \frac{\alpha \,.\, f(\alpha)}{E_1\, f(\alpha) - f(\alpha)} = \frac{\alpha \,.\, E_1\, f(\alpha)}{E_1\, f(\alpha) - f(\alpha)}$$

$$x_0 < \beta + \frac{\beta \,.\, f(\beta)}{E_1\, f(\beta) - f(\beta)} = \frac{\beta \,.\, E_1\, f(\beta)}{E_1\, f(\beta) - f(\beta)}$$

que son idénticas á las desigualdades (7) del artículo último.

Comprobamos así, una vez más, que ya se usen las relaciones (1) ó bien las (2), los valores que se encuentran sucesivamente para x_0 están siempre aproximados en igual sentido, lo mismo utilizando el número α que valiéndonos de β. Se trata ahora de encontrar otro límite para el valor exacto de la raíz.

Para fijar mejor las ideas en el curso de la exposición siguiente, supondremos que α y β sean positivos, aun cuando los resultados que se obtienen bien generalizados fácilmente.

Consideremos la función

$$\Psi(x) = \varphi(x) + \frac{N}{x_0 \,.\, x^2} \,.\, (x - x_0)^2$$

en la cual N designa una cantidad constante del mismo signo que la relación

$$\frac{x^2 \,.\, E_2\, f(x)}{E_1\, f(x) - f(x)}$$

y cuyo valor absoluto es á lo menos igual á la mitad del mayor de los valores absolutos que toma dicha misma relación cuando x crece de α á β; es decir, que N se encuentra definido por la igualdad

(3)
$$2 . N . \Theta = \frac{x^2 . E_2 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

siendo Θ una funcion de x cuyo valor está comprendido entre 0 y 1 cuando x varía de α á β.

Se establecerá también la relación

(4)
$$\frac{x . f(x)}{E_1 f(x) - f(x)} = V . (x_0 - x)$$

que será útil más adelante.

Incrementando en $\Psi(x)$ á la variable x, tendremos

$$\Psi(x + h) = \varphi(x + h) + \frac{N}{x_0 . (x + h)^2} . (x - x_0 + h)^2$$

por lo cual

$$\Psi(x + h) - \Psi(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x) + \frac{N}{x_0 . (x + h)^2} . (x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{2 . N}{x_0 . (x + h)^2} . (x - x_0) . h + \frac{N . h^2}{x_0 . (x + h)^2} - \frac{N}{x_0 . x^2} . (x - x_0)^2$$

En virtud del desarrollo del binomio de Newton

$$\frac{1}{(x + h)^2} = (x + h)^{-2} = \frac{1}{x^2} . - \frac{2 . h}{x^3} + \rho\, h^2$$

obtendremos

$$\Psi(x + h) - \Psi(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x) +$$

$$+ \frac{N . (x - x_0)^2}{x_0} . \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2\, h}{x^3} + \rho . h^2\right] +$$

$$+ \frac{2 . N}{x_0} . (x - x_0) . h . \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2 . h}{x^3} + \rho . h^2\right] +$$

$$+ \frac{N\, h^2}{x_0} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{2 . h}{x^3} + \rho . h^2\right] - \frac{N}{x_0 . x^2} . (x - x_0)^2$$

Dividiendo por h ambos miembros se tendrá

$$\frac{\Psi(x + h) - \Psi(x)}{h} = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} - \frac{2 . N (x - x_0)^2}{x_0 . x^3} +$$

$$\frac{2 . N . (x - x_0)}{x_0 . x^2} + A . h$$

ó bien

$$\frac{\Psi(x+h)-\Psi(x)}{h}=\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}+\frac{2\,.\,N}{x^3}(x-x_0)+A\,.\,h$$

Pero según demostramos en el teorema IV del § 30

$$\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}=\frac{f(x)\,.\,E_2\,f(x)}{[E_1\,f(x)-f(x)]^2}+B\,.\,h$$

luego

$$\frac{\Psi(x+h)-\Psi(x)}{h}=\frac{f(x)\,.\,E_2\,f(x)}{[E_1\,f(x)-f(x)]^2}+\frac{2\,.\,N}{x^3}(x-x_0)\,.+P\,.\,h$$

En virtud de las igualdades (3) y (4) podremos escribir

$$\frac{f(x)\,.\,E_2\,f(x)}{[E_1\,f(x)-f(x)]^2}=2\,.\,N\,.\,\Theta\,.\,V\,.\,\frac{x_0-x}{x^3}$$

y por lo tanto

(5) $$\frac{\Psi(x+h)-\Psi(x)}{h}=2\,.\,N\,.\,\frac{x-x_0}{x^3}\,.\,(1-\Theta\,.\,V)+P\,.\,h$$

Como $E_1\,f(x)$ es de grado $(m-1)$ se tiene

$$E_1\,\varphi(x)=-\frac{x\,.\,f(x)\,.\,E_2\,f(x)}{[E_1\,f(x)-f(x)]^2}$$

y entonces

$$\frac{\Psi(x+h)-\Psi(x)}{h}=-\frac{E_1\,\Psi(x)}{x}+P\,.\,h$$

siendo

(6) $$E_1\,\Psi(x)=-2\,.\,N\,.\,\frac{x-x_0}{x^2}\,(1-\Theta\,.\,V)$$

La fórmula (5), que es cierta cualquiera que sea el grado de $f(x)$, es la que aplicaremos.

A) Supongamos que $f(\alpha)$ y $E_2\,f(\alpha)$ sean del mismo signo.

Entonces la función $\varphi(x)$ será creciente entre α y x_0 luego

$$\varphi(x_0)=x_0>\varphi(x)$$

desigualdad que equivale á la

$$V<1$$

Como por otra parte

$$V > 0 \qquad \Theta > 0 \qquad \Theta > 1$$

resultará

$$1 - \Theta \, . \, V > 0 \, .$$

En este caso $N > 0$, pues para $x = \alpha$ la diferencia $E_1 f(x) - f(x)$ tiene el mismo signo que $f(x)$ ó que $E_2 f(x)$.

Siendo

$$x - x_0 < 0$$

el segundo miembro de la igualdad (5) será negativo y entonces $\Psi(x)$ decrece de α á x_0; es decir

$$\Psi(\alpha) > \Psi(x_0) = x_0$$

ó bien

$$x_0 < \varphi(\alpha) + \frac{N}{\alpha^2 \, . \, x_0} \, . \, (x_0 - \alpha)^2$$

y con mayor razón, puesto que N es positivo

$$x_0 < \varphi(\alpha) + \frac{N}{\alpha^2 \, . \, x_0} \, . \, (\beta - \alpha)^2$$

así como también

$$x_0 < \varphi(\alpha) + \frac{N}{\alpha^3} (\beta - \alpha)^2 = \varphi(\alpha) + \frac{N}{\alpha} \, . \left(\frac{\beta}{\alpha} - 1 \right)^2$$

Tenemos, pues, los dos límites para la raíz verdadera

$$(7) \qquad \begin{cases} x_0 > \dfrac{\alpha \, . \, E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} \\[2ex] x_0 < \dfrac{\alpha \, . \, E_1 f(\alpha)}{E_1 f(\alpha) - f(\alpha)} + \dfrac{N}{\alpha} \, . \left(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1 \right)^2 \end{cases}$$

B) Supongamos que $f(\alpha)$ y $E_2 f(\alpha)$ sean de signos contrarios.

En tal hipótesis, las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tienen signos iguales para $x = \beta$, lo que demuestra la desigualdad

$$\varphi(x) > \varphi(x_0) = x_0$$

equivalente á

$$V < 1$$

ya que

$$x_0 - x < 0.$$

Como en este caso

$$\Theta > 0 \qquad \Theta < 1 \qquad V > 0$$

será

$$1 - \Theta \,.\, V > 0$$

Para $x = \beta$ la función $E_1 f(x) - f(x)$ tiene signo contrario á $f(x)$ ó bien á $E_2 f(x)$, luego

$$N < 0$$

Resultará de aquí, que el segundo miembro de (5) es negativo, por lo cual $\Psi(x)$ es decreciente de x_0 á β, lo que implica

$$x_0 = \Psi(x_0) > \Psi(\beta)$$

ó bien

$$x_0 > \varphi(\beta) + \frac{N}{x_0 \,.\, \beta^2} (\beta - x_0)^2$$

y siendo $N < 0$, con mayor razón

$$x_0 > \varphi(\beta) + \frac{N}{x_0 \,.\, \beta^2} \,.\, (\beta - \alpha)^2$$

así como también

$$x_0 > \varphi(\beta) + \frac{N}{\alpha \,.\, \beta^2} (\beta - \alpha)^2 = \varphi(\beta) + \frac{N}{\alpha} \,.\, \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

Para la raíz verdadera habrá los dos límites

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} x_0 < \dfrac{\beta \,.\, E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)} \\[2ex] x_0 > \dfrac{\beta \,.\, E_1 f(\beta)}{E_1 f(\beta) - f(\beta)} + \dfrac{N}{\alpha} \,.\, \left(1 - \dfrac{\alpha}{\beta}\right)^2 \end{cases}$$

Estos resultados conducen al siguiente principio:

Sean α y $\beta > \alpha$ dos números de signos positivos que comprenden una sola raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$ y entre los cuales no se anulan las funciones $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$. Representemos por 2 M un número que tenga el signo de la relación

$$\frac{x^2 \cdot E_2 f(x)}{E_1 f(x) - f(x)}$$

y cuyo módulo sea igual ó superior al mayor de los módulos que toma dicha misma relación cuando x varía entre α y β. Si se designa por a aquel de los dos límites α ó β para el cual las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tienen el mismo signo, y por b aquel que dá signos diferentes á dichas funciones, tendremos que la raíz x_0 se encuentra comprendida entre estos dos nuevos límites

$$(9) \quad a_1 = \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad b_1 = \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} + \frac{N}{\alpha} \cdot \left(\frac{b}{a} - 1\right)^2$$

Cuando entre los límites α y β cada una de las funciones $x^2 E_2 f(x)$ y $E_1 f(x) - f(x)$ varía en el mismo sentido, se podrá formar el número N dividiendo aquella de las dos cantidades

$$\frac{1}{2} \cdot \alpha^2 \cdot E_2 f(\alpha) \qquad \frac{1}{2} \cdot \beta^2 \cdot E_2 f(\beta)$$

que tenga el mayor valor absoluto por aquella de las dos

$$E_1 f(\alpha) - f(\alpha) \qquad E_1 f(\beta) - f(\beta)$$

que sea de más pequeño valor absoluto. (Corral.)

La fórmula (5) es completamente general, de modo que suponiendo $\alpha < \beta < 0$ es fácil deducir, por razonamientos análogos á los anteriores, que los nuevos límites de la raíz x_0 son

$$(10) \quad a_1 = \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad b_1 = \frac{a \cdot E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} + \frac{N}{\beta} \left(\frac{b}{a} - 1\right)^2$$

Adoptaremos los límites de las fórmulas (9) *cuando* $\beta > \alpha > 0$, *y los dados por las relaciones* (10) *cuando* $\alpha < \beta < 0$.

Ejemplo.—Sea la ecuación

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

por lo cual

$$f(x) = x^3 - 2x - 5$$
$$E_1 f(x) = -4 \cdot x - 15$$
$$E_2 f(x) = -4 \cdot x - 30$$

Existe una raíz positiva entre $x = 2$ y $x = 2 . 1$ pues

$$f(2) < 0 \qquad f(2 . 1) > 0$$

y la cual deseamos calcular con diez cifras decimales exactas.

Como para $x = 2$ las funciones $f(x)$ y $E_2 f(x)$ tienen el mismo signo, será según nuestra regla anterior

$$a = 2 \qquad \alpha = 2 \qquad b = 2 . 1$$

Para encontrar el valor de N observemos que las funciones

$$x^2 . E_2 f(x) = - 4 x^3 - 30 . x^2$$

$$E_1 f(x) - f(x) = - x^3 - 2 . x - 10$$

varían en el mismo sentido entre 2 y 2 . 1; luego de acuerdo con el principio mencionado

$$N = \frac{1}{2} . \frac{4 \times \overline{2 . 1}^3 + 30 \times \overline{2 . 1}^2}{2^3 + 2 . 2 + 10} = 3.8487$$

Los nuevos valores aproximados, por defecto y por exceso, á la raíz serán

$$a_1 = \frac{2 . E_1 f(2)}{E_1 f(2) - f(2)} = \frac{46}{22} = 2 . 09$$

$$b_1 = a_1 + \frac{3.8487}{2} \left(\frac{2 \;\, 1}{2} - 1 \right)^2 = 2\,094810875$$

los cuales tienen dos cifras decimales exactas.

Aplicando las mismas fórmulas se encuentra

$$a_2 = \frac{2\,09 \times E_1 f(2\,09)}{E_1 f(2.09) - f(2.09)} = \frac{48.8224}{23\,309329} = .094543$$

$$b_2 = a_2 + \frac{3.8487}{2.09} \left(\frac{2.094810875}{2.09} - 1 \right)^2 = 2.094553$$

dándonos el valor de la raíz con cuatro decimales exactos.

Una última aplicación de las fórmulas nos produce

$$a_3 = \frac{2.09454 \times E_1 f(2.09454)}{E_1 f(2.09454) - f(2.09454)} = 2.0945514814$$

$$b_3 = a_3 + \frac{3.8487}{2.09454} . \left(\frac{2.094553}{2.09454} - 1 \right)^2 = 2\,09455148147$$

luego a_3 es el valor de la raíz con diez cifras decimales verdaderas. Si fuese preciso mayor exactitud se continuaría operando por el mismo procedimiento.

Ejemplo II. – Para aplicar nuestras fórmulas (10) calculemos la raíz de la ecuación

$$f(x) = x^3 - 7\,.\,x + 7 = 0$$

que se encuentra comprendida entre — 3 y — 3 . 1 . Tenemos aquí

$$E_1\, f(x) = -14\,.\,x + 21$$

$$E_2\, f(x) = -14\,.\,x + 42$$

$$f(-3) > 0 \qquad f(-3\,.\,1) < 0 \qquad E_2\, f(-3) > 0$$

$$a = \beta = -3 \qquad \alpha = b = -3\,.\,1$$

Como las dos funciones

$$x^2\,.\,E_2\, f(x) = -14\,.\,x^3 + 42\,.\,x^2$$

$$E_1\, f(x) - f(x) = -x^3 - 7\,.\,x + 14$$

varían en el mismo sentido entre — 3 y — 3 . 1, resultará para N el valor

$$N = \frac{1}{2} \times \frac{14 \times \overline{3\,.\,1}^{\,3} + 42 \times \overline{3\,.\,1}^{\,2}}{3^3 + 7 \times 3 + 14} = \frac{410\,347}{62} = 6\,6185$$

Los límites de la raíz buscada serán (10)

$$a_1 = \frac{-3\,.\,E_1\, f(-3)}{E_1\, f(-3) - f(-3)} = -\frac{189}{62} = -3\,0483$$

$$b_1 = a_1 + \frac{N}{-3}\left(\frac{-3\,.\,1}{-3} - 1\right)^2 = -3\,0483 - 2.20616 \times 0.0011109 = -3\,0507$$

Haciendo ahora

$$a = \beta = -3.048 \qquad b = \alpha = -3.0507$$

las mismas fórmulas (10) nos darán

$$a_2 = \frac{-3\,048 \times E_1\, f(-3.043)}{E_1\, f(-3.048) - f(-3.048)} = -\frac{194.072256}{63.652847} = -3.048917$$

$$b_2 = a_2 - \frac{6.6185}{3.048} \cdot \left(\frac{3.0507}{3.048} - 1\right)^2 = -3.0489187$$

luego a_2 es un valor por defecto de la raíz buscada pero con cinco cifras decimales exactas.

De igual modo se puede proseguir el cálculo cuando se necesite mayor aproximación.

§ 36.—Aplicación simultánea del procedimiento anterior y del método de las partes proporcionales.

Hemos comprobado que si p y $q > p$ son dos números que comprenden una sola raíz de la ecuación $f(x) = 0$ nuestro método anterior da un valor aproximado por *defecto* cuando

(1) $$f(p) \cdot E_2 f(p) > 0$$

siendo por *exceso* en el caso que

(2) $$f(q) \cdot E_2 f(q) > 0$$

El procedimiento de *aproximación por partes proporcionales* conduce á un valor por *exceso* cuando

(3) $$f(p) \cdot f''(p) > 0$$

mientras que en el caso de ser

(4) $$f(q) \cdot f''(q) > 0$$

el valor obtenido es por *defecto.*

De aquí resulta, que el empleo simultáneo de ambos métodos para calcular valores de la raíz buscada, aproximados en sentidos contrarios, *sólo* puede realizarse cuando se verifiquen simultáneamente las relaciones (1) y (3) ó bien las (2) y (4).

Los números p y q se suponen tan próximos que las ecuaciones

$$f'(x) = 0 \qquad f''(x) = 0 \qquad E_1 f(x) = 0 \qquad E_2 f(x) = 0$$

no tienen ninguna raíz real entre los mismos; es decir, que las funciones

$$f'(x) \qquad f''(x) \qquad E_1 f(x) \qquad E_2 f(x)$$

no cambian de signo entre dichos límites.

Podemos establecer así el siguiente principio:

Sean p y $q > p$ dos números del mismo signo que comprenden una

sola raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$ y entre los cuales no se anulan las funciones $f'(x)$, $f''(x)$, $E_1 f(x)$ y $E_2 f(x)$. Cuando uno de los dos límites p ó q satisfaga simultáneamente las dos desigualdades

$$(m) \begin{cases} f(x) \,.\, E_2 f(x) > 0 \\ f(x) \,.\, f''(x) > 0 \end{cases}$$

será posible aplicar el actual procedimiento. Designando por a aquel de los dos límites p ó q que cumple con las condiciones (m) y por b el otro, tendremos que la raíz x_0 se encuentra comprendida entre

$$(5) \qquad a_1 = \frac{a \,.\, E_1 f(a)}{E_1 f(a) - f(a)} \qquad \text{y} \qquad b_1 = \frac{a \,.\, f(b) - b \,.\, f(a)}{-f(a) + f(b)} \qquad (6)$$

como dos nuevos límites de la misma. El valor a_1 será mayor que b_1 cuando $a = q$; por el contrario, $a_1 < b_1$ cuando $a = p$. (Corral.)

De este modo se irán calculando sucesivamente los límites $a_1, b_1; a_2, b_2; \ldots\ldots a_n, b_n; \ldots\ldots$ cada vez más aproximados al verdadero valor x_0 que se busca.

Al realizar cada operación, puede tomarse la media aritmética

$$\frac{a_n + b_n}{2}$$

de los dos límites obtenidos como valor (por exceso ó por defecto) de la raíz buscada, en la seguridad de que el error, cometido entonces, es siempre menor que

$$\pm \frac{a_n - b_n}{2} > 0$$

Así sabremos, con certeza, las cifras decimales que se pueden asignar á la raíz cuando pasemos de una operación á la siguiente.

Ejemplo I.—La ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

tiene una raíz comprendida entre 1.356 y 1.357 puesto que

$$f(1.356) = +\,0.001326016$$
$$f(1.357) = -\,0.000153707$$

Según sabemos

$$E_1\, f(x) - f(x) = - x^3 - 7\, x + 14$$
$$E_1\, f(x) = - 14\, .\, x + 21$$
$$E_2\, f(x) = - 14\, .\, x + 42$$
$$f'(x) = 3\, .\, x^2 - 7$$
$$f''(x) = 6\, .\, x$$

y como para $x = 1.386$ se verifica

$$f(1\,356)\, .\, E_2\, f(1\,356) > 0$$
$$f(1.356)\, .\, f''(1.356) > 0$$

resultará entonces que

$$p = a = 1.356$$
$$q = b = 1.357$$

Aplicando las fórmulas (5) y (6) obtendremos los nuevos límites

$$a_1 = \frac{1.356 \times E_1\, f(1.356)}{E_1\, f(1.356) - f(1.356)} = \frac{1.356 \times 2\,016}{2.014673984} = \frac{2.733696}{2.014673984} =$$
$$= 1.35689249\ldots..$$

$$b_1 = \frac{1.357 \times f(1.356) - 1.356 \times f(1.357)}{f(1.356) - f(1.357)} = \frac{0.002007830404}{0\,001479723} =$$
$$= 1.35689612\ldots..$$

La media aritmética

$$\frac{a_1 + b_1}{2} = 1.356894305\ldots..$$

se diferencia, por exceso ó por defecto, al valor exacto de la raíz en un error menor que

$$\frac{b_1 - a_1}{2} = 0\,00000186$$

Podría continuarse el procedimiento cuando se requiriese mayor aproximación.

La otra raíz positiva de esta misma ecuación está comprendida entre 1.5 y 2; pues

$$f(1.5) = - 0.125$$
$$f(2) = + 1$$

Como además

$$p = b = 1.5$$
$$q = a = 2$$

resultará

$$a_1 = \frac{2 \, . \, E_1 \, f(2)}{E_1 \, f(2) - f(2)} = \frac{14}{8} = 1.75$$

$$b_1 = \frac{2 \times f(1.5) - f(2) \times 1.5}{f(1.5) - f(2)} = \frac{1.75}{1.125} = 1.55 \ldots\ldots$$

La media aritmética vale 1.65 con un error menor que 0 . 1; pero siendo

$$f(1 \, . \, 6) = -\, 0.104 \qquad\qquad f(1 \, . \, 7) = +\, 0.013$$

podremos tomar

$$p = b = 1 \, . \, 6$$
$$q = a = 1 \, . \, 7$$

por lo cual

$$a_2 = \frac{1 \, . \, 7 \times E_1 \, f(1 \, . \, 7)}{E_1 \, f(1 \, . \, 7) - f(1 \, . \, 7)} = \frac{4 \, . \, 76}{2 \; 813} = 1.692143 \ldots\ldots$$

$$b_2 = \frac{1 \, . \, 6 \times f(1 \, . \, 7) - 1 \, . \, 7 \times f(1 \, . \, 6)}{f(1 \, . \, 7) - f(1 \, . \, 6)} = \frac{0.1976}{0.117} = 1.688888 \ldots\ldots$$

Calculando la media de estos dos valores, se obtiene 1.69051 con un error menor que 0.00162. Si sustituímos en $f\ (x)$ los números 1.691; 1.692; 1.6921 conseguiremos para los dos primeros resultados negativos, y positivo para el tercero; luego la raíz queda comprendida dentro de estos dos límites. Tenemos, en efecto,

$$f(1.692) = -\, 0.000034112$$
$$f(1.6921) = +\, 0.000124797961 \, .$$

Es fácil comprobar que

$$p = 1.692 = b$$
$$q = 1.6921 = a$$

de donde

$$a_3 = \frac{1.6921 \times E_1 \, f(1.6921)}{E_1 \, f(1.6921) - f(1.6921)} = \frac{4.55073374}{2.689524797961} = 1.69202148 \ldots\ldots$$

$$b_3 = \frac{1.692 \times f(1.6921) - 1.6921 \times f(1.692)}{f(1.6921) - f(1.692)} = \frac{0.000268879065212}{0.000158909961} =$$
$$= 1.69202146\ldots\ldots$$

La raíz buscada es pues

$$1.69202147$$

con un error menor que 0.00000001; es decir, que las primeras siete cifras decimales son exactas.

§ 37.—**Complemento al método de Lagrange.**

El cálculo de las raíces de una ecuación numérica según el método de Lagrange, consiste en encontrar el desarrollo de cada una de ellas en una fracción continua, cuyos diversos términos se van determinando por otras tantas ecuaciones transformadas de la propuesta. Así se halla

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Este procedimiento se haría impracticable, si Lagrange no hubiese indicado, al propio tiempo, un modo muy fácil para calcular sin tanteos los cocientes incompletos del valor de x, después que se conocen algunos de ellos.

Exponemos á continuación otro método especial, distinto al anterior, para fijar el valor de dichos cocientes, evitando así las operaciones considerables que exige el cálculo directo de los mismos por ecuaciones transformadas.

Sean los cocientes encontrados

$$a \qquad a_1 \qquad a_2 \qquad a_3 \ldots\ldots a_{n-1}$$

y las reducidas correspondientes

$$\frac{P_1}{Q_1} \qquad \frac{P_2}{Q_2} \qquad \frac{P_3}{Q_3} \qquad \frac{P_4}{Q_4} \ldots\ldots \frac{P_n}{Q_n}:$$

tratamos de hallar a_n sabiendo que

(1)
$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{x_n}}}}}$$

por lo cual

(2)
$$x = \frac{P_n \cdot x_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot x_n + Q_{n-1}}$$

de donde sacamos

$$x_n = \frac{Q_{n-1} \cdot x - P_{n-1}}{P_n - Q_n \cdot x}$$

Recordando que por la teoría de las fracciones continuas se demuestra la relación

$$P_n \cdot Q_{n-1} - Q_n \cdot P_{n-1} = (-1^n$$

deduciremos

(3)
$$x_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{(-1)^n \cdot x}{P_n \cdot (P_n - Q_n \cdot x)}$$

Reemplazando en vez de x cada una de las raíces restantes x', x'', x''' ..... de la ecuación dada $f(x) = 0$, la igualdad (3) nos dará los valores de las raíces correspondientes x'_n, x''_n, x'''_n ..... de la ecuación transformada en x_n, que será

$$A_0^{(n)} x_n^m + A_1^{(n)} x_n^{m-1} + \ldots\ldots + A_{m-1}^{(n)} \cdot x_n + A_m^{(n)} = 0$$

Resultará pues

$$x'_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{(-1)^n \cdot x'}{P_n \cdot Q_n \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n} - x' \right)}$$

$$x''_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{(-1)^n \cdot x''}{P_n \cdot Q_n \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n} - x'' \right)}$$

$$x'''_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{(-1)^n \cdot x'''}{P_n \cdot Q_n \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n} - x'''\right)}$$

igualdades que sumadas ordenadamente dan

$$-x_n - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{(n)}} + (m-1) \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} = \frac{(-1)^n \cdot x'}{P_n \cdot Q_n \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n} - x'\right)} +$$

$$+ \frac{(-1)^n \cdot x''}{P_n \cdot Q_n \cdot \left(\frac{P_n}{Q_n} - x''\right)} + \cdots\cdots$$

si se tiene en cuenta que

$$x_n + x'_n + x''_n + x'''_n + \cdots\cdots = - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{(n)}}$$

Llamando

$$\Delta = \frac{-x'}{\frac{P_n}{Q_n} - x'} + \frac{-x''}{\frac{P_n}{Q_n} - x''} + \frac{-x'''}{\frac{P_n}{Q_n} - x'''} + \cdots\cdots$$

obtendremos

(4) $$x_n = (m-1) \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{(n)}} + \frac{(-1)^n \cdot \Delta}{P_n \cdot Q_n}$$

Si hacemos

$$\xi_n = (m-1) \cdot \frac{P_{n-1}}{P_n} - \frac{A_1^{(n)}}{A_0^{(n)}} \quad (5)$$

se tendrá

$$x_n = \xi_n + \frac{(-1)^n \cdot \Delta}{P_n \; Q_n} \quad (6).$$

Cuando se llegue á una reducida $\frac{P_n}{Q_n}$ tal que

(5) $$P_n \cdot Q_n > \pm K \cdot \Delta$$

donde K sea un número suficientemente grande, el error que se comete al tomar

$$x_n = \xi_n$$

es menor que $\frac{1}{K}$ ó sea inferior á una cantidad muy pequeña. La fórmula (5) dará entonces el cociente entero a_n contenido en x_n.

La anterior investigación supone conocido el valor de ∇ y vamos á ver ahora cómo puede calcularse fácilmente. Como la reducida $\frac{P_n}{Q_n}$ es ya bastante próxima á x, la cantidad ∇ diferirá poco de

$$N = \frac{-x'}{x - x'} + \frac{-x''}{x - x''} + \frac{-x'''}{x - x'''} + \dots\dots$$

cuando n sea bastante grande. Pero sabemos que

$$\frac{E_1 f(X)}{f(X)} + \frac{x}{X - x} = \frac{-x'}{X - x'} + \frac{-x''}{X - x''} + \frac{-x'''}{X - x'''} + \dots\dots$$

en donde haciendo $X = x + h$, se observa que á medida que h tienda á cero, el segundo miembro irá aproximándose al valor N, así pues

$$(6) \qquad N = \text{límite de} \left[\frac{E_1 f(x+h)}{f(x+h)} + \frac{x}{h} \right] \text{cuando } h = 0$$

Ahora bien

$$E_1 f(x+h) = E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} -$$
$$- E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h}{x} + \dots .$$

$$f(x+h) = - E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} +$$
$$+ E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} - \dots\dots$$

recordando que

$$f(x) = 0 .$$

Como también

$$N = \lim \left[\frac{h \cdot E_1 f(x+h) + x \cdot f(x+h)}{h \cdot f(x+h)} \right]_{h=0}$$

resultará sustituyendo los valores anteriores

$$N = \lim \left[\frac{ \begin{array}{c} -\frac{1}{2} \cdot E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x} + \\ + \frac{1}{3} \cdot E_3 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-3} \cdot \frac{h^3}{x^2} - \ldots\ldots \end{array} }{ \begin{array}{c} - E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h^2}{x} + \\ + E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^3}{1 \; 2 \cdot x^2} - \ldots\ldots \end{array} } \right]_{h=0}$$

Dividiendo numerador y denominador de esta fracción por

$$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{x}$$

y haciendo luego $h = 0$ tendremos

$$N = \frac{E_2 f(x)}{2 \cdot E_1 f(x)}$$

por lo cual la condición (5) se convierte en

$$P_n \cdot Q_n > \pm K \cdot N \, .$$

Al valor aproximado $x_n = \xi_n$ corresponderá para x un valor aproximado también que llamaremos ξ y que será en virtud de (2)

(6′) $$\xi = \frac{P_n \cdot \xi_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1}}$$

El error cometido por tomar $x = \xi$ vale

$$x - \xi = \frac{P_n \cdot x_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot x_n + Q_{n-1}} - \frac{P_n \cdot \xi_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot (x_n - \xi_n)}{(Q_n \, x_n + Q_{n-1}) \cdot (Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1})}$$

(7) $$x - \xi = \frac{\nabla}{P_n \cdot Q_n \cdot (Q_n x_n + Q_{n-1}) \cdot (Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1})}$$

cantidad que difiere poco de

(8) $$\frac{N}{P_n \cdot Q^3{}_n \cdot a^2{}_n}$$

la cual dará la expresión del error que se comete cuando se toma $x = \xi$, estando ξ determinado por la fórmula (6').

Si el desarrollo en fracción continua es bastante avanzado, la fórmula (5) no solamente nos dará el cociente incompleto a_n, sino que desarrollando ξ_n en fracción continua podremos obtener otros cocientes de x, siempre que este desarrollo se realice dentro de ciertos límites que vamos á precisar.

Los cocientes que obtengamos desarrollando en fracción continua á ξ_n los escribiremos á continuación de los anteriores

$$a \; a_1 \; a_2 \ldots\ldots a_n,$$

así como también haremos lo mismo con las reducidas correspondientes. Sea una de éstas $\frac{P}{Q}$, su cociente incompleto respectivo α; la reducida anterior y su cociente los llamaremos $\frac{P'}{Q'}$ y β'. Como $\frac{P}{Q}$ es reducida de ξ, habrá que demostrar que también lo es de x, pues entonces evidentemente resulta cierto el procedimiento enunciado. Es preciso, pues, probar que $\frac{P}{Q}$ es reducida de x, fijando al mismo tiempo hasta qué límites ó bajo qué condiciones dicha propiedad se verifica.

Según hipótesis

$$\xi = \frac{P \cdot \alpha + P'}{Q \cdot \alpha + Q'} = \frac{P}{Q} \pm \frac{1}{Q \cdot (Q\,\alpha + Q')}$$

pues

$$P \cdot Q' - Q \cdot P' = \mp 1$$

Sumando esta igualdad con la (7) tendremos

$$x - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{Q \cdot \alpha + Q'} + \frac{\nabla}{P_n \cdot Q_n \cdot (Q_n \cdot x_n + Q_{n-1}) \cdot (Q_n \cdot \xi_n + Q_{n-1})}$$

ó aproximadamente

$$(9) \qquad x - \frac{P}{Q} = \frac{\pm 1}{Q^2 \cdot \alpha} + \frac{N}{P_n \cdot Q_n^3 \cdot a_n^2}$$

Si β es un número indeterminado que satisface la relación

$$Q < \frac{a_n \cdot Q_n \cdot \sqrt{P_n \cdot Q_n}}{\sqrt{\pm \beta N}}$$

ó bien

$$\frac{N}{a_n^2 \cdot Q_n^3 \cdot P_n} < \frac{\pm 1}{Q^2 \cdot \beta}$$

se tendrá entonces

$$x - \frac{P}{Q} < \pm \frac{1}{Q^2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

El segundo miembro de la igualdad (9) será, pues, inferior en valor absoluto á

$$\frac{1}{Q^2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

y á la cantidad

$$\frac{1}{2 \cdot Q^2}$$

siempre que se verifique la relación

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad \beta > \frac{2\,\alpha}{\alpha - 2}. \qquad (10)$$

Siendo $x - \frac{P}{Q}$ de menos valor que $\frac{1}{2 \cdot Q^2}$, la función $\frac{P}{Q}$ será una de las reducidas de x, necesitándose para ello que $\alpha > 2$ á fin de que β sea un número positivo.

Bajo estas condiciones ξ_n desarrollado en fracción continua nos dará cocientes incompletos de x.

Ejemplo.—Sea la ecuación

$$x^3 - 7\,x + 7 = 0$$

que tiene dos raíces reales comprendidas entre 1 y 2. Haciendo

$$x = 1 + \frac{1}{x_1}$$

se encuentra la transformada

$$x_1^3 - 4\,x_1^2 + 3 \cdot x_1 + 1 = 0$$

que posee una raíz entre 1 y 2, otra entre 2 y 3, Considerando esta última tomaremos

$$x_1 = 2 + \frac{1}{x_2}$$

de donde se obtiene

$$x_2^{\,3} + x_2^{\,2} - 2 \, . \, x_2 - 1 = 0$$

ecuación que tiene una raíz entre 1 y 2. Así tendremos

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

siendo la transformada correspondiente á x_3

$$x_3^{\,3} - 3\, x_3^{\,2} - 4 \, . \, x_3 - 1 = 0$$

cuya raíz positiva está comprendida entre 4 y 5: luego

$$x_3 = 4 + \frac{1}{x_4}$$

resultando entonces

$$x_4^{\,3} - 20\, x_4^{\,2} - 9\, x_4 - 1 = 0$$

Habiéndose ya encontrado los cuatro primeros cocientes incompletos de la raíz, apliquemos nuestro procedimiento para calcular inmediatamente y sin clase alguna de tanteos otros varios cocientes, hallando un valor más aproximado de la raíz.

Según la regla conocida en Álgebra para formar las diversas reducidas de una fracción continua, tendremos

1	2	1	4	
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{19}{14}$

y en el caso actual

$$P_n = 19 \qquad P_{n-1} = 4 \qquad Q_n = 14 \qquad Q_{n-1} = 3$$

$$A_1^{(n)} = -20 \qquad m = 3 \qquad A_0^{(n)} = 1$$

luego por la fórmula (4) deduciremos

$$x_4 = 2 \, . \, \frac{4}{19} + 20 + \frac{\nabla}{19 \times 14} \qquad a_4 = 20$$

La cantidad ∇ ó N vale

$$\frac{E_2\, f(x)}{2\, E_1\, f(x)} = \frac{7\, x - 42}{14\, x - 42} < 4$$

Tomando

$$x_4 = \xi_4 = 2 \cdot \frac{4}{19} + 20 = \frac{388}{19}$$

se obtendrá para x el valor

$$x = \frac{P_n x_n + P_{n-1}}{Q_n \cdot x_n + Q_{n-1}} = \frac{19 \cdot \frac{388}{19} + 4}{14 \cdot \frac{388}{19} + 3} = \frac{7448}{5489}$$

con un error menor que

$$\frac{N}{P_n \cdot \overline{Q_n}^3 \cdot \overline{a_n}^2} = \frac{4}{19 \times \overline{14}^3 \times 20^2} = 0.00\ 00\ 00\ 2$$

por lo cual podremos transformar en decimales esta fracción en la seguridad de que las primeras seis cifras son exactas. Así tendremos

$$x = \frac{7448}{5489} = 1.3568956$$

de conformidad con el valor hallado en otro lugar.

Para continuar el cálculo de x aun con mayor aproximación haremos

$$x_4 = 20 + \frac{1}{x_5}$$

encontrándose la ecuación

$$181 \cdot x_5^3 - 391 \cdot x_5^2 - 40 \cdot x_5 - 1 = 0$$

en donde

$$A_0^{(n)} = 181 \qquad A_1^{(n)} = -391$$

valiendo la quinta reducida

$$P_n = 384 \qquad Q_n = 283$$

y la cuarta

$$P_{n-1} = 19 \qquad Q_{n-1} = 14$$

La fórmula (4) nos da

$$x_5 = 2 \cdot \frac{19}{384} + \frac{391}{181} - \frac{\nabla}{384 \times 283}$$

luego

$$a_5 = 2$$

Haciendo

$$x_5 = \frac{38}{384} + \frac{391}{181} = \frac{157022}{69504}$$

resultará

$$x = \frac{384 \times \frac{157022}{69504} + 19}{283 \times \frac{157022}{69504} + 14} = \frac{61617024}{45410282} = 1.3568958677$$

con nueve cifras decimales exactas puesto que el error es menor que

$$\frac{4}{384 \times \overline{283}^3 \times 4}$$

De un modo análogo pueden calcularse las raíces reales restantes de la ecuación dada.

§ 38.—**Método de Laguerre.**

Este método se aplica únicamente á las ecuaciones cuyas raíces son todas reales. Expondremos la demostración del mismo usando de las eulerianas de la función dada, si bien la fórmula final á que se llega es idéntica á la de Laguerre, dada la relación conocida entre las derivadas y las eulerianas de una función entera.

Supongamos se tenga una forma binaria de grado m, es decir, una funcion homogénea de dos variables x, y; llamando por (ξ, η) un sistema de variables cogredientes con (x, y) formemos las *polares* de la forma [Weber, págs. 228 y 229].

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} P_1(x_1 \xi) = \frac{1}{m} \cdot \left[\frac{\xi}{x} \cdot E_1^y f + \frac{\eta}{y} \cdot E_1^x f \right] \\ P_2(x_1 \xi) = \frac{1}{m \cdot (m-1)} \left[\frac{\xi^2}{x^2} \cdot E_2^{y^2} f + 2 \cdot \frac{\xi \cdot \eta}{x \, y} \cdot E_2^{x \cdot y} f + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{\eta^2}{y^2} \cdot E_2^{x^2} f \right] \\ P_3(x_1 \xi) = \frac{1}{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)} \cdot \left[\frac{\xi^3}{x^3} \cdot E_3^{y^3} f + \right. \\ \left. + 3 \cdot \frac{\xi^2 \cdot \eta}{x^2 \cdot y} \cdot E_3^{y^2 \cdot x} f + 3 \cdot \frac{\xi \cdot \eta^2}{x \, y^2} \cdot E^{y \cdot x^2} f + \frac{\eta^3}{y^3} \cdot E_3^{x^3} f \right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

cuyas funciones permanecen invariables cuando se someten las variables (ξ, η) (x, y) á una misma transformación lineal sustituyendo en vez de $f(x\ y)$ y de sus eulerianas las nuevas funciones transformadas.

La forma anterior que hemos dado á las polares de una función homogénea de dos variables tiene por origen la relación general

$$(2) \qquad x^r \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+s} f}{d_x{}^r \cdot d_y{}^r} = E^{y^r \cdot x^s}_{r+s} f$$

en donde $(r + s)$ no puede ser mayor que n. Para probar la exactitud de esta igualdad (2), admitamos sea cierta para estos números r y s, justificando que entonces lo es también para los $(r + 1)$, s ó r, $(s + 1)$; es decir, que

$$(3) \qquad x^{r+1} \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+s+1} f}{dx^{r+1} \cdot dy^s} = E^{y^{r+1} \cdot x^s}_{r+s+1} f$$

$$(4) \qquad x^r \cdot y^{s+1} \cdot \frac{d^{r+s+1} f}{dx^r \cdot dy^{s+1}} = E^{y^r \cdot x^{s+1}}_{r+s+1} f$$

Tenemos, efectivamente, por la definición de euleriana que

$$x \cdot \frac{d^{r+s+1} f}{dx^{r+1} \cdot dy^s} = (m - r - s) \cdot \frac{d^{r+s} f}{dx^r \cdot dy^s} - E_1^x \left(\frac{d^{r+s} f}{dx^r \cdot dy^s} \right)$$

y tomando en (2) eulerianas con relación á x en ambos miembros

$$x^r \cdot y^s \cdot E_1^x \left(\frac{d^{r+s} f}{dx^r \cdot dy^s} \right) = E^{r \cdot x^{s+1}}_{r+s+1} f$$

luego deduciremos

$$x^{r+1} \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+s+1} f}{dx^{r+1} \cdot dy^s} = (m - r - s) \cdot x^r \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+1} f}{dx^r \cdot dy^s} - E^{y^r \cdot x^{s+1}}_{r+s+1} f$$

y en virtud de (2)

$$(5) \quad x^{r+1} \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+s+1} f}{dx^{r+1} \cdot dy^s} = (m - r - s) \cdot E^{y^r \cdot x^s}_{r+s} f - E^{y^r \cdot x^{s+1}}_{r+s+1} f$$

Pero también por definición

$$(6) \qquad E^{y^{r+1} . x^s}_{r+s+1} f = (m-r) . E^{y^r . x^s}_{r+s} f - y . \frac{d}{dy}\left(E^{y^r . x^s}_{r+s} f\right)$$

y como $E^{y^r . x^s}_{r+s} f$ es una función de grado m, homogénea, de las variables $(x\ y)$, resultará

$$y . \frac{d}{dy}\left(E^{y^r . x^s}_{r+s} f\right) = m . E^{y^r . x^s}_{r+s} f - x . \frac{d}{dx}\left(E^{y^r . x^s}_{r+s} f\right)$$

Ahora bien

$$E^{x^{s+1} y^r}_{r+s+1} f = (m-s) . E^{x^s . y^r}_{r+s} f - x . \frac{d}{dx}\left(E^{y^r . x^s}_{r+s} f\right)$$

luego

$$y . \frac{d}{dy}\left(E^{x^s . y^r}_{r+s} f\right) = E^{x^{s+1} y^r}_{r+s+1} f + s . E^{x^s . y^r}_{r+s} f$$

y sustituyendo en (6)

$$E^{y^{r+1} . x^s}_{r+s+1} f = (m-r-s) . E^{x^s . y^r}_{r+s} f - E^{x^{s+1} . y^r}_{r+s+1} f$$

así es que en virtud de (5) tendremos

$$x^{r+1} . y^s . \frac{d^{r+s+1} f}{dx^{r+1} . y^s} = E^{y^r . x^s}_{r+s+1} f$$

ó sea la igualdad (3). De un modo análogo se demuestra que la (4) es igualmente cierta, y por tanto también la (2).

Si la ecuación $f(x) = 0$ tiene todas sus raíces reales, ocurrirá lo mismo con sus polares $P_1(x\ \xi)$, $P_2(x\ \xi)$, $P_3(x\ \xi)$ . . . . . siendo ξ y η números arbitrarios. (Laguerre.)

La sustitución lineal que se adopte puede elegirse de tal modo que los valores transformados sean

$$\xi' = 1 \qquad\qquad \eta' = 0$$

y entonces los polares se convierten á las funciones siguientes:

$$\frac{1}{x} . E^{y}_{1} f \qquad \frac{1}{x^2} . E^{y^2}_{2} f \qquad \frac{1}{x^3} . E^{y^3}_{3} f \ldots\ldots$$

que son las diversas derivadas de $f(x)$, cuando en ellas se hace $y = 1$

Siendo las raíces de

$$(7) \quad P_2(x\,\xi) = \frac{\xi^2}{x^2} E_2^{y^2} f + 2 \cdot \frac{\xi \cdot \eta}{x \cdot y} \cdot E_2^{x \cdot y} f + \frac{\eta^2}{y^2} \cdot E_2^{x^2} f = 0$$

todas reales, la función H

$$(m-1) \cdot H \cdot \xi^2 \cdot \eta^2 = E_2^{\eta^2} f \cdot E_2^{\xi^2} f - \left[E_2^{\xi \cdot \eta} f\right]^2 = \cdot H_1 \cdot (m-1)$$

será negativa para todos los valores reales de ξ y η; pues si H fuese positiva, las raíces de $P_2(x\,\xi) = 0$ serían imaginarias en contra de la hipótesis hecha sobre $f(x) = 0$, y si H fuese nula, la ecuación (7) tendría sus dos raíces iguales, resultando entonces que $f\ (x\ y)$ sería la *enésima* potencia de una función lineal, cuyo caso especial no se considera al presente. De aquí resultará que H_1 sólo tiene raíces imaginarias ó nulas. La función H se denomina la *Hessiana* de $f(\xi\ \eta)$.

Vamos á calcular el valor de H_1 cuando la función dada $f\ (x)$ no es homogénea. En virtud del teorema I del § 4 se tendrá

$$E_1^x f + E_1^y f = m \cdot f(x\,y)$$
$$E_2^{x^2} f + E_2^{x \cdot y} f = (m-1)\, E_1^x f(x\,y)$$
$$E_2^{y^2} f + E_2^{x \cdot y} f = (m-1)\, E_1^y f(x\,y)$$

y haciendo $y = 1$ resultará

$$(7') \quad \begin{cases} E_1^y f(x) = m \cdot f(x) - E_1 f(x) \\ E_2^{y^2} \cdot f(x) = (m-1) \cdot E_1 f(x) - E_2 f(x) \\ E_2^{y^2} \cdot f(x) = m \cdot (m-1) \cdot f(x) - 2 \cdot (m-1) \cdot E_1 f(x) + E_2 f(x) \end{cases}$$

Como por definición

$$(7'') \quad (m-1) \cdot H_1(x\,y) = E_2^{x^2} f \cdot E_2^{y^2} f - \left[E_2^{x\,y} f\right]^2$$

obtendremos, pues, sustituyendo los valores anteriores

$$H_1(x\,y) = m \cdot f(x) \cdot E_2 f(x) - (m-1)\,[E_1 f(x)]^2 = H_1(x)$$

de modo que $H_1\ (x\ y)$ es de grado $2\,m - 2$ con relación á x.

La ecuación dada $f\ (x) = 0$
tiene todas sus raíces $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \ldots \alpha_m$ reales y distintas, luego

$$S\left(\frac{\alpha}{x-\alpha}\right) = -\frac{E_1 f(x)}{f(x)}$$

y tomando eulerianas en ambos miembros

$$S\left[\frac{\alpha^2}{(x-\alpha^2)}\right] = \frac{[E_1 f(x)]^2 - E_2 f(x) \cdot f(x)}{[f(x)]^2}$$

ó también

$$S\left[\frac{\alpha^2}{(x-\alpha)^2}\right] = \frac{[E_1 f(x)]^2 - H_1(x)}{m \cdot [f(x)]^2}$$

Empleando notaciones homogéneas, es decir, poniendo $\frac{\alpha}{\beta}$ en lugar de α y $\frac{x}{y}$ en vez de x tendremos

$$E_1 f(x\, y) = y^m \cdot E_1 f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f(x\, y) = y^m \cdot f\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$H_1(x\, y) = y^{2\,m} \cdot H_1\left(\frac{x}{y}\right)$$

luego

$$S\left[\frac{\alpha^2}{(x\,\beta - y\,\alpha)^2}\right] = \frac{[E_1^x f]^2 - H_1(x\,y)}{m \cdot y^2 \cdot [f(x\,y)]^2} \qquad \textbf{(8)}$$

Hagamos la transformación lineal siguiente:

$$x = a\,x' + b\,y' \qquad \alpha = a\,\alpha' + b\,\beta'$$

$$y = c\,x' + d \cdot y' \qquad \beta = c \cdot \alpha' + d \cdot \beta'$$

de donde

$$r = ad - bc \qquad \beta\,x - \alpha\,y = r \cdot (\beta' \cdot x' - \alpha' \cdot y)$$

$$r \cdot x' = d \cdot x - b\,y \qquad r \cdot y' = -c \cdot x + a \cdot y$$

Como $f\,(x\ y)$ se transforma en $\varphi\,(x'\ y')$ deduciremos

$$\frac{r}{y} \cdot E_1^x f = \frac{a}{y'} E_1^{x'} \varphi - \frac{b}{x'} \cdot E_1^{y'} \varphi$$

$$r^2 \cdot H_1(x\,y) = \frac{x^2 \cdot y^2}{x'^2 \cdot y'^2} \cdot H_1(x'\,y')$$

valores que sustituídos en (8) dan

$$S\left(\frac{a\,\alpha' + b\,\beta'}{\beta' \cdot x' - \alpha'\,y'}\right)^2 = \frac{\left(\frac{a}{y'} \cdot E_1^{x'}\varphi - \frac{b}{x'} \cdot E_1^{y'}\varphi\right)^2 - (a\,x' + b\,y')^2 \cdot \frac{H_1(x'\,y')}{x'^2 \cdot y'^2}}{m \cdot [\varphi(x'\,y')]^2}$$

Para mayor comodidad y elegancia hagamos en esta fórmula

$$a = \eta \qquad\qquad b = -\xi$$

suprimiendo además todos los acentos y poniendo $f(x\,y)$ en vez de $\varphi(x'\,y')$; resultará entonces la relación

$$(9)\quad S\left(\frac{\beta\,\xi - \alpha\,\eta}{\beta\,x - \alpha\,y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\eta}{y} \cdot E_1^x f + \frac{\xi}{x} \cdot E_1^y f\right)^2 - (\eta\,x - \xi\,y)^2 \cdot \frac{H_1(x\,y)}{x^2 \cdot y^2}}{m \cdot [f(x\,y)]^2}$$

cuyos dos miembros permanecen invariables cuando se realiza una misma sustitución lineal en los tres pares $(x\,y)$, $(\alpha\,\beta)$, $(\xi\,\eta)$ de variables cogredientes

La proposición sobre la cual se funda el método de Laguerre es la siguiente:

Llamando P al valor de la igualdad (9) *y considerando la ecuación*

$$P = \frac{(X \cdot \eta - Y \cdot \xi)^2}{(X \cdot y - Y\,x)^2}$$

ó bien

$$P \cdot (X \cdot y - Y \cdot x)^2 - (X \cdot \eta - Y \cdot \xi)^2 = 0 \qquad (10)$$

los valores deducidos para $\frac{X}{Y}$ *están más próximos á las raíces* $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$ *de* $f(x) = 0$ *que el valor dado* $\frac{x}{y}$ *comprendido entre ellas.* (Laguerre.)

Como los valores así encontrados para $\frac{X}{Y}$ tienen que hacer

positivo al discriminante de (10) considerado como función de ξ, η, podemos calcular aquellos que lo anulan. Á tal fin, sustituiremos en (10) el valor (9) de P encontrándose que los coeficientes de ξ^2, $2\,\xi\,\eta$ y η^2 son respectivamente

$$\frac{\frac{1}{x^2}\,.\,(E_1^{\,y}f)^2-\frac{H_1(x\,y)}{x^2}}{m\,.\,[f(x\,y)]^2}\,.\,(X\,y-Y\,.\,x)^2-Y^2$$

$$\frac{\frac{1}{x\,.\,y}\,.\,E_1^{\,x}f\,.\,E_1^{\,y}f+\frac{H_1(x\,y)}{x\,.\,y}}{m\,.\,[f(x)]^2}\,(X\,y-Y\,x)^2+X\,.\,Y$$

$$\frac{\frac{1}{y^2}\,.\,(E_1^{\,x}f)^2-\frac{H_1(x\,y)}{y^2}}{m\,.\,[f(x]^2}\,.\,(X\,y-Y\,x)^2-X^2$$

luego el valor del discriminante es

$$\frac{(X\,.\,y-Y\,.\,x)^2}{x^2\,.\,y^2\,.\,m\,.\,f^2}\,.\left[(m-1)\,H_1(x\,y)\,.\,(X\,y-Y\,x)^2+(x\,Y\,.\,E_1^{\,x}f+y\,X\,.\,E_1^{\,y}f)^2\right]=0$$

De aquí resulta, que los valores buscados para $\frac{X}{Y}$ son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$(m-1)\,.\,H_1(x\,y)\,.\,(X\,y-Y\,x)^2+(x\,.\,Y\,.\,E_1^{x}f+y\,.\,X\,.\,E_1^{\,y}f)^2=0$$

que están dados por la fórmula

$$x\,.\,Y\,.\,E_1^{\,x}f+y\,.\,X\,.\,E_1^{\,y}f=\pm\,(X\,y-Y\,x)\,\sqrt{(m-1)\,.\,H_1(x\,y)}$$

Supongamos ahora que se haga $y=1$, $Y=1$; recordando los valores dados por las igualdades (7′) y (7″) obtendremos

$$x\,.\,E_1\,f(x)+X\,(m\,.\,f-E_1\,f(x))=$$
$$\pm\,(X-x)\,.\,\sqrt{(m-1)^2\,.\,(E_1\,f)^2-m\,.\,(m-1)\,.\,f\,.\,E_2\,f}$$

de donde

$$x - X = \frac{m \cdot f(x) \cdot x}{m \cdot f(x) - E_1 f(x) \mp \sqrt{(m-1)^2 \cdot [E_1 f(x)]^2 - m \cdot (m-1) \cdot f(x) \cdot E_2 f(x)}}$$

que es la fórmula de Laguerre expresada por medio de las eulerianas de la función dada. No tratamos más ampliamente este procedimiento por creerlo innecesario á nuestros fines, ya que nada nuevo podemos consignar.

CAPÍTULO VII

Raíces imaginarias.

---

§ 39.—Separación de las raíces imaginarias.

La ecuación dada

$$f(z) = 0$$

puede ser una función real ó de coeficientes imaginarios. Trataremos sólo el primer caso, pues el segundo se encuentra resuelto por el teorema de Cauchy [véase obra Serret, tomo I, pág. 319].

Se podrá efectuar la separación de las raíces imaginarias haciendo uso del método seguido en el § 24. Trazando dos paralelas al eje rectangular Ox de modo que se encuentren ambas arriba ó abajo del mismo, quedará determinado, por la aplicación del teorema I del § 1, el número exacto de raíces imaginarias de $f(z) = 0$ comprendidas entre y_0 é y_1. Eligiendo otros valores

(I) $\qquad y_2 \qquad y_3 \qquad y_4 \ldots\ldots$

se podrá ir averiguando el número de raíces situadas en cada uno de estos intervalos. Cuando no haya más que una sola raíz en dicho espacio, quedará entonces *separada:* si hubiese varias se podrá realizar la separación por medio de paralelas intermedias, salvo el caso que existan diversas raíces con igual coeficiente imaginario. La úni-

ca condición que tienen que satisfacer la serie de valores (1) es que sean todos positivos ó negativos.

Ordenada la función M

$$f(z) = M + i \cdot y \cdot N$$

con relación á las potencias decrecientes de x, su primer término valdrá

$$a_0 x^m \qquad \text{ya sea } m \text{ par ó impar}$$

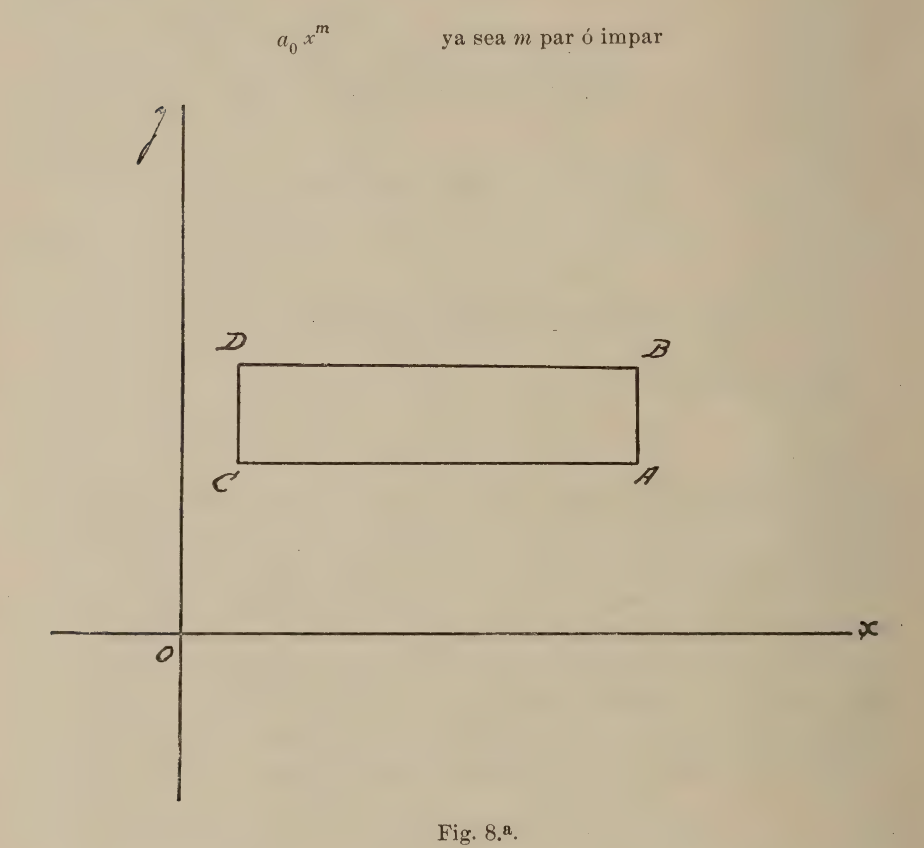


Fig. 8.ª.

Dando á x un valor de módulo muy grande, la función M no se anulará para ningún valor de y comprendido entre y_0 é Y; luego el exceso parcial de la fracción $\frac{M}{N}$ á lo largo de las rectas AB y CD (Fig. 8) será nulo.

El exceso correspondiente á BD se encontrará sustituyendo y por Y en el cociente $\frac{M(x\,y)}{N(x\,y)}$ que se convierte entonces en

$$\frac{M(x\,Y)}{N(x\,Y)}$$

Haciendo ahora variar á x de $+\infty$ á $-\infty$, se podrá calcular la diferencia K entre el número de veces que dicha relación anulándose pasa de positiva á negativa y la totalidad de ocasiones que el mismo cociente se reduce á cero al transformarse de negativo á positivo.

De igual modo encontraremos el exceso parcial relativo á la otra paralela CA, pues bastará poner $y = y_0$, considerando la fracción

$$\frac{M(x\,y_0)}{N(x\,y_0)}$$

que servirá para calcular el exceso K_0 de signo contrario á K. Así entonces

$$K - K_0 = 2\,\mu'_2$$

pues $\mu'_1 = 0$; quedando por tanto determinado el número exacto μ'_2 de raíces imaginarias comprendidas entre las dos paralelas BD y AC prolongadas indefinidamente á derecha é izquierda del eje $0\,y$.

Procediendo de este modo se llegará á determinar dos límites, tan aproximados como se quiera, entre los cuales se encuentra la parte imaginaria y de la raíz buscada. Si al mismo tiempo se desea tener los límites del valor x correspondiente, habrá que trazar paralelas al eje $0\,y$; pues de este modo se dibujarán una serie de rectángulos, todos situados arriba ó abajo de $0\,x$, los cuales comprenderán puntos raíces de $f(z) = 0$, cuyo número será determinado por el teorema I del § 1.

§ 40.—**Fórmulas generales.**

La fórmula ya demostrada

$$f(x+h) = f(x)\,.\left(1+\frac{h}{x}\right)^m - E_1 f(x)\,.\left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1}.\,\frac{h}{x} +$$

$$+ E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} - \ldots\ldots$$

puede generalizarse para el caso de una función entera de dos variables x, y. Tenemos evidentemente entonces, incrementado solo á la variable x y permaneciendo la otra y constante, que

$$f(x+h, y) = f(xy) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - E_1^x f(xy) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} +$$
$$+ E_2^{x^2} f(xy) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} - \ldots\ldots$$

en donde cambiando y por $y + k$ resultará

$$f(x+h, y+k) = f(x, y+k) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m -$$
$$- E_1^x f(x, y+k) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} +$$
$$+ E_2^{x^2} f(x, y+k) \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2}$$

Suponiendo que $f(xy)$ sea de grado n con relación á y, tendremos

$$f(x, y+k) = f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^n - E_1^y f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-1} \cdot \frac{k}{y} +$$
$$+ E_2^{y^2} f(xy) \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-2} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot y^2} - \ldots\ldots$$

$$E_1^x f(x, y+k) = E_1^x f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^n - E_2^{xy} f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-1} \cdot \frac{k}{y} +$$
$$+ E_3^{xy^2} f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-2} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot y^2} - \ldots\ldots$$

$$E_2^{x^2} f(x, y+k) = E_2^{x^2} \cdot f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^n -$$
$$- E_3^{x^2 \cdot y} f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-1} \cdot \frac{k}{y} +$$
$$+ E_4^{x^2 \cdot y^2} f(xy) \cdot \left(1 + \frac{k}{y}\right)^{n-2} \cdot \frac{k^2}{1 \cdot 2 \cdot y^2} - \ldots\ldots$$

valores que sustituídos en la fórmula anterior dan

$$f(x+h,\, y+k) = f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^m . \left(1+\frac{k}{y}\right)^n -$$

$$- E_1^{\,x} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^n . \frac{h}{x} -$$

$$- E_1^{\,y} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n-1} . \frac{k}{y} +$$

$$+ E_2^{\,x^2} . f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n} . \frac{h^2}{1\,.\,2\,.\,x^2}$$

$$+ 2\,.\, E_2^{\,x\,y} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n} . \frac{h\,.\,k}{1\,.\,2\,.\,x\,.\,y}$$

$$+ E_2^{\,y^2} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n-2} . \frac{k^2}{1\,.\,2\,.\,y^2}$$

$$- E_3^{\,x^3} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-3} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n} . \frac{h^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,x^3}$$

$$- 3\,.\, E_3^{\,x^2\,.\,y} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-2} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n-1} . \frac{h^2\,.\,k}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,x^2\,.\,y}$$

$$- 3\,.\, E_3^{\,x\,.\,y^2} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m-1} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n-2} . \frac{h\,.\,k^2}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,x\,.\,y^2}$$

$$- E_3^{\,y^3} f(x\,y) \,.\, \left(1+\frac{h}{x}\right)^{m} . \left(1+\frac{k}{y}\right)^{n-3} . \frac{k^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,y^3} + \ldots\ldots$$

Fórmulas análogas á la anterior se deducen para una función entera de tres ó más variables.

Desarrollo de $f\,(x + h,\; y + k)$ cuando $f\,(x\;y)$ es homogénea de grado m.

La fórmula de Taylor toma la siguiente expresión simbólica:

$$f(x+h,\, y+k) = f(x\,.\,y) + \left(h\,.\,\frac{d\,f}{d\,x} + k\,.\,\frac{d\,f}{d\,y}\right) +$$

$$+ \frac{1}{1\,.\,2} . \left(h\,.\,\frac{d\,f}{d\,x} + k\,.\,\frac{d\,f}{d\,y}\right)^2 + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!} . \left(h\,.\,\frac{d\,f}{d\,x} + k\,.\,\frac{d\,f}{d\,y}\right)^n + \ldots\ldots$$

Como $f\,(x\;y)$ es una forma binaria, se tienen las siguientes relaciones ya demostradas

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \cdot E_1^{\,y} f \qquad\qquad \frac{df}{dy} = \frac{1}{y} \cdot E_1^{\,x} f$$

$$x^r \cdot y^s \cdot \frac{d^{r+s} f}{d x^r \cdot dy^s} = E_{r+s}^{\,y^r \cdot x^s} f$$

luego podremos entonces escribir simbólicamente

$$f(x+h,\, y+k) = f(x\,y) + \left(\frac{h}{x} \cdot E_1^{\,y} f + \frac{k}{y} \cdot E_1^{\,x} f\right) +$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left(\frac{h}{x} \cdot E_1^{\,y} f + \frac{k}{y} \cdot E_1^{\,x} f\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{h}{x} \cdot E_1^{\,y} f + \frac{k}{y} \cdot E_1^{\,x} f\right)^3 + \cdots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(\frac{h}{x} \cdot E_1^{\,y} f + \frac{k}{y} \cdot E_1^{\,x} f\right)^n + \cdots$$

En el caso de realizarse la sustitución lineal

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y$$
$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y$$

haremos en la fórmula anterior

$$x = \lambda_1 \cdot X \qquad h = \mu_1 \cdot Y \qquad y = \lambda_2 \cdot X \qquad k = \mu_2 \cdot Y$$

y entonces las funciones

$$f(x\,y)\,, \quad E_1^{\,x} f(x\,y)\,, \quad E_1^{\,y} f(x\,y)\,, \quad E_2^{\,x^2} f(x\,y)\,, \quad E_2^{\,x \cdot y} f(x\,y) \cdots$$

se convierten respectivamente en

$$\text{(1)} \quad X^m \cdot f(\lambda_1\,\lambda_2)\,, \quad X^m \cdot E_1^{\lambda_1} f(\lambda_1\,\lambda_2)\,, \quad X^m \cdot E_1^{\lambda_2} f(\lambda_1\,\lambda_2)\,,$$
$$X^m \cdot E_2^{\lambda_1^2} f(\lambda_1\,\lambda_2)\,, \quad X^m \cdot E_2^{\lambda_1\,\lambda_2} f(\lambda_1\,\lambda_2) \cdots$$

Empleando la notación bastante frecuente de indicar por

$$(\varphi)_\alpha^\beta$$

el resultado de sustituir en la función $\varphi(x\,y)$ los valores $x = \alpha$, $y = \beta$, tendremos que la serie (1) equivaldrá á la siguiente

$$X^m \cdot (f)_{\lambda_1}^{\lambda_2}, \qquad X^m \cdot (E_1^x f)_{\lambda_1}^{\lambda_2}, \qquad X^m \cdot (E_1^y f)_{\lambda_1}^{\lambda_2},$$

$$X^m \cdot \left(E_2^{x^2} f\right)_{\lambda_1}^{\lambda_2}, \qquad X^m (E_2^{xy} f)_{\lambda_1}^{\lambda_2}$$

luego entonces

$$f(\lambda_1 X + \mu_1 Y, \lambda_2 X + \mu_2 Y) = X^m \cdot (f)_{\lambda}^{\lambda_2} +$$

$$+ X^{m-1} \cdot Y \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} E_1^y f + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot E_1^x f \right)_{\lambda_1}^{\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2} X^{m-2} \cdot Y^2 \cdot \left[\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot E_1^y f + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot E_1^x f \right)^2 \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot X^{m-3} \cdot Y^3 \left[\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot E_1^y f + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot E_1^x f \right)^3 \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots\ldots i} X^{m-i} \cdot Y^i \cdot \left[\left(\frac{\mu_1}{\lambda_1} \cdot E_1^y f + \frac{\mu_2}{\lambda_2} \cdot E_1^x f \right)^i \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} + \ldots\ldots$$

fórmula que da el desarrollo inmediato según las diversas potencias de las nuevas variables X, Y.

§ 41.—Cálculo de las raíces imaginarias.

Obtenida la separación de las raíces imaginarias, procediendo de acuerdo con el § 39, se puede obtener valores cada vez más aproximados al verdadero por medio de nuestro método del § 34, que no está limitado únicamente para las raíces reales.

Si z_0 representa un primer valor aproximado de la raíz compleja z de la ecuación de grado m

$$f(z) = 0$$

el valor exacto de dicha raíz será

$$z = z_0 + \mu$$

luego deduciremos como en el § 34 que

$$\mu = \frac{z_0 \; f(z_0)}{E_1 f(z_0) - f(z_0)}$$

siendo preciso examinar en cada caso el grado de exactitud que se deriva de aplicar la fórmula precedente; discusión casi siempre difícil de realizar.

Otro modo de resolver el problema actual es el siguiente.

La investigación de una raíz compleja

$$z_0 = x_0 + i \, . \, y_0$$

de la ecuación

$$f(z) = f(x + i \, . \, y) = \varphi(x\, y) + i \, . \, \Psi(x\, y) = 0$$

consiste esencialmente en calcular una solución real de las ecuaciones simultáneas

$$\varphi(x\, y) = 0 \qquad \Psi(x\, y) = 0$$

conociendo los valores aproximados x_0, y_0 de x, y. Haciendo entonces

$$x = x_0 + \xi \qquad y = y_0 + \eta$$

tendremos según las fórmulas del número anterior

$$O = \varphi(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \varphi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^m -$$
$$- E_1^{\,x} \varphi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y}\right)^m \cdot \frac{\xi}{x_0} \quad .$$
$$- E_1^{\,y} \varphi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y}\right)^{n-1} \cdot \frac{\eta}{y_0} + \ldots\ldots$$

$$O = \Psi(x_0 + \xi, y_0 + \eta) = \Psi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y}\right)^m -$$
$$- E_1^{\,x} \Psi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y}\right)^m \cdot \frac{\xi}{x_0}$$
$$- E_1^{\,y} \Psi(x_0\, y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y}\right)^{m-1} \cdot \frac{\eta}{y_0} + \ldots\ldots$$

Siendo ξ y η cantidades suficientemente pequeñas, en las dos

igualdades anteriores podrán despreciarse todos los términos en que entren los cuadrados ó los productos de ξ y η; luego tendremos entonces las relaciones

$$E_1^x \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^m \cdot \frac{\xi}{x_0} +$$
$$+ E_1^y \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^{m-1} \cdot \frac{\eta}{y_0} =$$
$$= \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m + \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^m$$

$$E_1^x \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^m \cdot \frac{\xi}{x_0} +$$
$$+ E_1^y \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^{m-1} \cdot \frac{\eta}{y_0} =$$
$$= \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^m \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^m$$

que divididas ambas por $\left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)^{m-1}$, dan

$$E_1^x \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right) \frac{\xi}{x_0} + E_1^y \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) \cdot \frac{\eta}{y_0} =$$
$$= \varphi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)$$

$$E_1^x \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right) \cdot \frac{\xi}{x_0} + E_1^y \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) \frac{\eta}{y_0} =$$
$$= \Psi(x_0 y_0) \cdot \left(1 + \frac{\xi}{x_0}\right) \left(1 + \frac{\eta}{y_0}\right)$$

Prescindiendo de los términos en $\xi \, . \, \eta$ obtendremos

$$\frac{\xi}{x_0} \cdot \left[E_1^x \varphi(x_0 y_0) - \varphi(x_0 y_0)\right] + \frac{\eta}{y_0} \cdot \left[E_1^y \varphi(x_0 y_0) - \varphi(x_0 y_0)\right] = \varphi(x_0 y_0)$$

$$\frac{\xi}{x_0} \left[E_1^x \Psi(x_0 y_0) - \Psi(x_0 y_0)\right] + \frac{\eta}{y_0} \left[E_1^y \Psi(x_0 y_0) - \Psi(x_0 y_0)\right] = \Psi(x_0 y_0)$$

cuyas dos ecuaciones lineales resueltas con relación á ξ y η producen

$$\xi = \frac{\Psi(x_0 y_0) \cdot E_1^{y} \varphi(x_0 y_0) - \varphi(x_0 y_0) \cdot E_1^{y} \Psi(x_0 y_0)}{E_1^{y} \varphi(x_0 y_0) \cdot [E_1^{x} \Psi(x_0 y_0) - \Psi(x_0 y_0)] + E_1^{x} \varphi(x_0 y_0) \cdot [\Psi(x_0 y_0) - - E_1^{y} \Psi(x_0 y_0)] + \varphi(x_0 y_0) \cdot [E_1^{y} \Psi(x_0 y_0) - E_1^{x} \Psi(x_0 y_0)]}$$

$$\eta = \frac{\varphi(x_0 y_0) \cdot E_1^{x} \Psi(x_0 y_0) - \Psi(x_0 y_0) \cdot E_1^{x} \varphi(x_0 y_0)}{E_1^{y} \varphi(x_0 y_0) \cdot [E_1^{x} \Psi(x_0 y_0) - \Psi(x_0 y_0)] + E_1^{x} \varphi(x_0 y_0) \cdot [\Psi(x_0 y_0) - - E_1^{y} \Psi(x_0 y_0)] + \varphi(x_0 y_0) \cdot [E_1^{y} \Psi(x_0 y_0) - E_1^{x} \Psi(x_0 y_0)]}$$

Estas fórmulas se aplican en todos los casos, ya sea x_0, y_0 una solución sencilla ó múltiple del sistema

$$\varphi(x\, y) = 0 \qquad \Psi(x\, y) = 0$$

El procedimiento anterior necesita para su realización cálculos muy largos y enojosos, por lo cual se adopta generalmente el método que consiste en eliminar una de las variables, resolviendo después las ecuaciones resultantes.

CAPÍTULO VIII

Aplicaciones diversas.

§ 42.—Bezoutiana de una función.

Supongamos sea la ecuación

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 . x^{n-1} + a_2 . x^{n-2} + \ldots . . + a_{n-1} . x + a_n = 0$$

y hagamos

(1) $y = t_{n-1} . f_0(x) + t_{n-2} . f_1(x) + t_{n-3} . f_2(x) + \ldots . . + t_0 . f_{n-1}(x)$

Consideremos la función

(2) $$S(y . z)$$

en donde

(3) $z = \tau_{n-1} . f_0(x) + \tau_{n-2} . f_1(x) + \tau_{n-3} . f_2(x) + \ldots . . + \tau_0 . f_{n-1}(x)$

y en la cual S significa la suma de los diversos valores del producto $y . z$, á quien afecta, cuando en lugar de x se sustituyen sucesivamente todas las raíces de la ecuación dada.

En el caso particular de ser $y = z$ la función (2) toma la forma siguiente

$$S(y^2)$$

y constituye lo que el insigne matemático inglés Mr. Sylvester denominó *bezoutiana de la ecuación* $f(x) = 0$, en honor al inmortal Bezout.

18

El cálculo de la bezoutiana, designada en lo sucesivo por la letra B, se obtendrá deduciendo el valor de la función (2) y haciendo luego $t = \tau$ ó sea $y = z$.

Puede demostrarse fácilmente [Weber, págs. 267 y 268] que

$$(4) \qquad y \cdot f_s = \mathcal{E}_{0.s} \cdot f_0 + \mathcal{E}_{1.s} \cdot f_1 + \mathcal{E}_{2.s} \cdot f_2 + \cdots + \mathcal{E}_{n-1.s} \cdot f_{n-1}$$

valiendo

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{0.s} = - a_{s+1} \cdot t_{n-2} - a_{s+2} \cdot t_{n-3} - \cdots - a_n \cdot t_{s-1} = a_0 \cdot t_{n+s-1} + \\ \qquad + a_1 \cdot t_{n+s-2} + \cdots + a_s \cdot t_{n-1} \\ \mathcal{E}_{1.s} = - a_{s+1} \cdot t_{n-3} - a_{s+2} \cdot t_{n-4} - \cdots - a_n \cdot t_{s-2} = a_0 \cdot t_{n+s-2} + \\ \qquad + a_1 \cdot t_{n+s-3} + \cdots + a_s \cdot t_{n-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{E}_{s-1.s} = - a_{s+1} \cdot t_{n-s-1} - a_{s+2} \cdot t_{n-s-2} - \cdots - a_n \cdot t_0 = a_0 \cdot t_n + \\ \qquad + a_1 \cdot t_{n-1} + \cdots + a_s \cdot t_{n-s} \\ \mathcal{E}_{s.s} = a_0 \cdot t_{n-1} + a_1 \cdot t_{n-2} + \cdots + a_s \cdot t_{n-s-1} \\ \mathcal{E}_{s+1.s} = a_0 \cdot t_{n-2} + a_1 \cdot t_{n-3} + \cdots + a_s \cdot t_{n-s-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{E}_{n-1.s} = a_0 \cdot t_s + a_1 \cdot t_{s-1} + \cdots + a_s \cdot t_0 \end{array} \right.$$

Multiplicando ambos miembros de (4) por τ_{n-s-1}, haciendo luego s igual sucesivamente á los números 0, 1, 2, 3 ..... $(n-1)$, para sumar después los resultados parciales así obtenidos, se llegará á la relación

$$(6) \qquad y \cdot z = f_0 \cdot \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{0.s} \cdot \tau_{n-s-1} + f_1 \cdot \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{1.s} \cdot \tau_{n-s-1} + \cdots + \\ + f_{n-1} \cdot \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{n-1.s} \cdot \tau_{n-s-1}$$

de donde

$$(7) \; S(y \cdot z) = n \cdot a_0 \cdot \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{0.s} \cdot \tau_{n-s-1} + (n-1)\, a_1 \cdot \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{1.s} \cdot \tau_{n-s-1} + \\ + \cdots + a_{n-1} \sum_{0.n-1}^{s} \mathcal{E}_{n-1.s} \cdot \tau_{n-s-1}$$

en virtud de las conocidas igualdades

$$S f_0 = n \cdot a_0 \qquad S f_1 = (n-1)\, a_1 \cdots\cdots S f_{n-1} = a_{n-1}$$

El segundo miembro de (7) es una función cuadrática de las va-

riables t, τ siendo además simétrica con relación á las mismas: así se podrá poner

(8) $$S(y\,z) = \sum_{0.n-1}^{h.k} B_{h.k} \cdot t_h \cdot \tau_k$$

con la condición $B_{h.k} = B_{k.h}$. Cuando se haga $t = \tau$ ó bien $y = z$, la función anterior es entonces la bezoutiana

$$B = \sum_{0.n-1}^{h.k} B_{h.k} \cdot t_h \cdot t_k = S(y^2)$$

Los coeficientes $B_{h.k}$ son de segundo grado con relación á los a_i de la ecuación dada; su valor puede calcularse como sigue. Multiplicando las igualdades (1) y (3) se tendrá

$$y \cdot z = \sum_{0.n-1}^{h.k} f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1} \cdot t_h \cdot \tau_k$$

por lo cual

$$S(y.z) = \sum_{0.n-1}^{h\ k} t_h \cdot \tau_k \cdot S(f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1})$$

luego

$$B_{h.k} = S(f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1})$$

Efectuemos la multiplicación de los dos determinantes

$$\Phi^2 = \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \cdots\cdots f_{n-1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \cdots\cdots f_{n-1}(x_2) \\ f_0(x_3) & f_1(x_3) & f_2(x_3) \cdots\cdots f_{n-1}(x_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & f_2(x_n) \cdots\cdots f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) & f_2(x_1) \cdots\cdots f_{n-1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) & f_2(x_2) \cdots\cdots f_{n-1}(x_2) \\ f_0(x_3) & f_1(x_3) & f_2(x_3) \cdots\cdots f_{n-1}(x_3) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) & f_2(x_n) \cdots\cdots f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

y se obtendrá el determinante ∇ de la función B

$$\nabla = \Sigma(\pm \beta_{0.0}\, \beta_{1.1} \cdots\cdots \beta_{n-1.n-1})$$

Por otra parte Φ^2 es el cuadrado del producto

$$\begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_1 & a_0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 \ldots\ldots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} \ldots a_0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \ldots\ldots x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 \ldots\ldots x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \ldots\ldots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = a_0^n . P$$

es decir

$$\Phi^2 = a_0^{2n} . P^2$$

Llamando D al discriminante de $f(x)$, es sabido que

$$P^2 = \frac{D}{a_0^{2n-2}}$$

luego definitivamente

$$\nabla = \Phi^2 = a_0^2 . D$$

El determinante de la bezoutiana de $f(x)$ es igual al discriminante de $f(x)$ multiplicado por el cuadrado del primer coeficiente a_0.

Ejemplos. Procedamos á realizar el cálculo de la bezoutiana cuando $n = 3$, $n = 4$, y $n = 5$.

Siendo la función

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

se tendrá

$$\begin{array}{l|r}
\mathcal{E}_{0.0} = a_0 . t_2 & 3\, a_0 . \tau_2 \\
\mathcal{E}_{1.0} = a_0 . t_1 & 2\, a_1 . \tau_2 \\
\mathcal{E}_{2.0} = a_0\, t_0 & a_2 . \tau_2 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.1} = - a_2 . t_1 - a_3 . t_0 & 3\, a_0 . \tau_1 \\
\mathcal{E}_{1.1} = a_0 . t_2 + a_1 . t_1 & 2\, a_1 . \tau_1 \\
\mathcal{E}_{2.1} = a_0 . t_1 + a_1 . t_0 & a_2 . \tau_1 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.2} = - a_3 . t_1 & 3\, a_0 . \tau_0 \\
\mathcal{E}_{1.2} = - a_3 . t_0 & 2\, a_1 . \tau_0 \\
\mathcal{E}_{2.2} = a_0\, t_2 + a_1\, t_1 + a_2\, t_0 & a_2\ \tau_0
\end{array}$$

Cada una de estas cantidades deberá ser multiplicada por la que tiene á su derecha, sumándose luego los resultados obtenidos. Así se encuentra

$$B_{2.2} = 3\,a_0^2 \qquad B_{0.1} = a_1\,a_2 - 3\,a_0 \cdot a_3$$
$$B_{1.1} = 2\,a_1^2 - 2\,a_0 \cdot a_2 \qquad B_{1.2} = 2\,a_1\,a_0$$
$$B_{0.0} = a_2^2 - 2\,a_1 \cdot a_3 \qquad B_{0.2} = a_0 \cdot a_2$$

Cuando la función sea

$$a_0\,x^4 + a_1\,x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_3\,x + a_4 = 0$$

entonces

$\mathcal{E}_{0.0} = a_0 \cdot t_3$	$4\,a_0 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{1.0} = a_0 \cdot t_2$	$3\,a_1 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{2.0} = a_0 \cdot t_1$	$2\,a_2 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{3.0} = a_0 \cdot t_0$	$a_3 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{0.1} = -\,a_2 \cdot t_2 - a_3 \cdot t_1 - a_4 \cdot t_0$	$4\,a_0 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{1.1} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2$	$3\,a_1 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{2.1} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1$	$2\,a_2 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{3.1} = a_0 \cdot t_1 + a_1 \cdot t_0$	$a_3 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{0.2} = -\,a_3 \cdot t_2 - a_4 \cdot t_1$	$4\,a_0 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{1.2} = -\,a_3 \cdot t_1 - a_4 \cdot t_0$	$3\,a_1 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{2.2} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1$	$2\,a_2 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{3.2} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_0$	$a_3 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{0.3} = -\,a_4 \cdot t_2$	$4\,a_0 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{1.3} = -\,a_4 \cdot t_1$	$3\,a_1 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{2.3} = -\,a_4 \cdot t_0$	$2\,a_2 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{3.3} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1 + a_3 \cdot t_0$	$a_3 \cdot \tau_0$

de donde deduciremos, realizando operaciones,

$$B_{3.3} = 4 \cdot a_0^2 \qquad B_{0.2} = -\,4\,a_0 \cdot a_4 + a_1 \cdot a_3$$
$$B_{2.2} = 3\,a_1^2 - 2\,a_0 \cdot a_2 \qquad B_{0.3} = a_0 \cdot a_3$$
$$B_{1.1} = 2\,a_2^2 - 4\,a_0 \cdot a_4 - 2\,a_1 \cdot a_3 \qquad B_{1.2} = 2\,a_1 \cdot a_2 - 3\,a_0 \cdot a_3$$
$$B_{0.0} = a_3^2 - 2\,a_2 \cdot a_4 \qquad B_{1.3} = 2\,a_0 \cdot a_2$$
$$B_{0.1} = a_2 \cdot a_3 - 3\,a_1 \cdot a_4 \qquad B_{2.3} = 3 \cdot a_0 \cdot a_1$$

Para $n = 5$, la función es

$$a_0\, x^5 + a_1\, x^4 + a_2 \,.\, x^3 + a_3 \,.\, x^2 + a_4 \,.\, x + a_5 = 0,$$

luego

$\mathcal{E}_{0.0} = a_0 \cdot t_4$	$5\, a_0 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{1.0} = a_0 \cdot t_3$	$4\, a_1 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{2.0} = a_0 \cdot t_2$	$3\, a_2 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{3.0} = a_0 \cdot t_1$	$2\, a_3 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{4.0} = a_0 \cdot t_0$	$a_4 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{0.1} = - a_2 \cdot t_3 - a_3 \cdot t_2 - a_4 \cdot t_1 - a_5 \cdot t_0$	$5 \,.\, a_0 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{1.1} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3$	$4 \,.\, a_1 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{2.1} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2$	$3\, a_2 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{3.1} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1$	$2\, a_3 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{4.1} = a_0 \cdot t_1 + a_1 \cdot t_0$	$a_4 \quad \tau_3$
$\mathcal{E}_{0.2} = - a_3 \cdot t_3 - a_4 \cdot t_2 - a_5 \cdot t_1$	$5 \,.\, a_0 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{1.2} = - a_3 \cdot t_2 - a_4 \cdot t_1 - a_5 \cdot t_0$	$4 \,.\, a_1 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{2.2} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3 + a_2 \cdot t_2$	$3 \,.\, a_2 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{3.2} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1$	$2 \,.\, a_3 \,.\, \tau_2$
$\mathcal{E}_{4.2} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_0$	$a_4 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{0.3} = - a_4 \cdot t_3 - a_5 \cdot t_2$	$5 \,.\, a_0 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{1.3} = - a_4 \cdot t_2 - a_5 \cdot t_1$	$4 \,.\, a_1 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{2.3} = - a_4 \cdot t_1 - a_5 \cdot t_0$	$3 \,.\, a_2 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{3.3} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3 + a_2 \cdot t_2 + a_3 \cdot t_1$	$2 \,.\, a_3 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{4.3} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1 + a_3 \cdot t_0$	$a_4 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{0.4} = - a_5 \cdot t_3$	$5 \,.\, a_0 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{1.4} = - a_5 \cdot t_2$	$4 \,.\, a_1 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{2.4} = - a_5 \cdot t_1$	$3 \,.\, a_2 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{3.4} = - a_5 \cdot t_0$	$2 \,.\, a_3 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{4.4} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3 + a_2 \cdot t_2 + a_3 \cdot t_1 + a_4 \cdot t_0$	$a_4 \cdot \tau_0$

por lo que se tendrá

$B_{4.4} = 5 \,.\, a_0^{\,2}$

$B_{3.3} = 4 \,.\, a_1^{\,2} - 2 \,.\, a_0 \,.\, a_2$

$B_{2.2} = 3 \,.\, a_2^{\,2} - 4 \,.\, a_0 \,.\, a_4 - 2\, a_1 \,.\, a_3$

$B_{1.1} = 2 \,.\, a_3^{\,2} - 2 \,.\, a_2 \,.\, a_4 - 4 \,.\, a_1 \,.\, a_5$

$B_{0.0} = a_4^{\,2} - 2 \,.\, a_3 \,.\, a_5$

$B_{0.1} = a_3 \,.\, a_4 - 3 \,.\, a_2 \,.\, a_5$

$B_{0.2} = a_2 \,.\, a_4 - 4 \,.\, a_1 \,.\, a_5$

$B_{0.3} = a_1 \,.\, a_4 - 5 \,.\, a_0 \,.\, a_5$

$B_{0.4} = a_0 \,.\, a_4$

$B_{1.2} = 2 \,.\, a_3 \,.\, a_2 - 3\, a_1 \,.\, a_4 - 5 \,.\, a_0 \,.\, a_5$

$B_{1.3} = 2 \,.\, a_1 \,.\, a_3 - 4 \,.\, a_0 \,.\, a_4$

$B_{1.4} = 2 \,.\, a_0 \,.\, a_3$

$B_{2.3} = 3 \,.\, a_1 \,.\, a_2 - 3 \,.\, a_0 \,.\, a_3$

$B_{2.4} = 3 \,.\, a_0 \,.\, a_2$

$$B_{3.4} = 4 \,.\, a_1 \,.\, a_0 \,.$$

Siguiendo el mismo procedimiento puede calcularse la bezoutiana de una ecuación cualquiera de grado n.

§ 43.—Significación de la bezoutiana.

Teorema I.—*La bezoutiana B de una función f (x) siendo descompuesta en una suma de π cuadrados positivos y ν cuadrados negativos de funciones lineales y reales que no pueden ser reducidos á un número menor, se tendrá que el número de raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$ vale $\pi + \nu$; el número de pares de raíces imaginarias conjugadas es ν, y el de raíces reales es $\pi - \nu$.*

Según se ha definido anteriormente, la bezoutiana es una forma cuadrática de n variables t_0, t_1, $t_2 \ldots\ldots t_{n-1}$ cuyos coeficientes son funciones enteras de los coeficientes a_i de $f(x)$. Es decir, que

$$B = S(y^2) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots\ldots + y_n^2 = \Phi(t_0, t_1 \ldots\ldots t_{n-1})$$

Es fácil demostrar [Weber, pág. 296], que si x_1, $x_2 \ldots\ldots x_i$ son raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$, las funciones $y_1, y_2 \ldots\ldots y_i$ son linealmente independientes; por lo tanto, reuniendo en la suma

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots\ldots + y_n^2$$

todos los términos iguales entre sí, dicha suma, ó sea la bezoutiana, tendrá tantos cuadrados $(\pi + \nu)$ de funciones lineales independientes, como la ecuación $f(x) = 0$ posee raíces distintas.

Si x_1 y x_2 son dos raíces imaginarias conjugadas, entonces

$$y_1 = u + i \cdot v$$
$$y_2 = u - i \cdot v$$

luego

$$y_1^2 + y_2^2 = 2\,u^2 - 2\,v^2$$

representando u y v dos funciones lineales y reales de las variables t. Cuando x_i sea real, positivo ó negativo, el cuadrado correspon-

diente y_i será siempre positivo; de modo que los cuadrados negativos ν en la bezoutiana, representan la existencia de otros tantos pares ν de raíces imaginarias conjugadas distintas de $f(x) = 0$. El número de raíces reales será, pues,

$$\pi + \nu - 2\nu = \pi - \nu$$

de conformidad con el enunciado.

Caso de que el determinante ∇ de B y por consecuencia el discriminante D de $f(x)$ sean diferentes de cero, se tendrá

$$\pi + \nu = n$$

y ν será inferior ó igual, como máximo, á $\frac{n}{2}$; de modo que la bezoutiana es una forma cuadrática que no puede poseer más de $\frac{n}{2}$ cuadrados negativos.

§ 44.—Sylvesteriana de una función.

La bezoutiana de una función sólo nos da el número exacto de raíces reales de la ecuación sin determinar la totalidad de las positivas ni indicar cuántas de ellas son negativas. La solución de este problema, es decir, el conocimiento exacto del número de raíces positivas y negativas de $f(x) = 0$, se consigue por medio de una nueva función

(1) $$S(x \cdot y^2)$$

que somos los primeros en considerar y á la cual denominamos *sylvesteriana*, en honor al ilustre Mr. Sylvester. Según veremos después, dicha función permite deducir la diferencia entre el número de raíces reales positivas y negativas de la ecuación dada, y como la suma de tales incógnitas es conocida por la bezoutiana, el problema queda entonces totalmente resuelto.

El valor de $y \cdot z$ está dado por la fórmula (6) del § 42.

$$y \cdot z = f_0 \cdot \sum_{0\ n-1}^{s} \mathcal{E}_{0 \cdot s} \cdot \tau_{n-s-1} + f_1 \sum_{0 \cdot n-1}^{s} \mathcal{E}_{1 \cdot s} \cdot \tau_{n-s-1} + \cdots +$$
$$+ f_{n-1} \sum_{0 \cdot n-1}^{s} \mathcal{E}_{n-1 s} \cdot \tau_{n-s-1}$$

de donde

$$y \cdot z \cdot x = x \cdot f_0 \cdot \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{0 . s} \cdot \tau_{n-s-1} + x \cdot f_1 \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{1 . s} \cdot \tau_{n-s-1} + \ldots\ldots +$$

$$+ x \cdot f_{n-1} \cdot \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{n-1 . s} \cdot \tau_{n-s-1}$$

Recordando las igualdades

$$S(x \cdot f_0) = - a_1 \qquad S(x f_1) = - 2\, a_2 \ldots\ldots S(x \cdot f_{n-1}) = - n \cdot a_n$$

se tendrá

$$\textbf{(2)}\quad S(y \cdot z \cdot x) = - a_1 \cdot \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{0 . s} \cdot \tau_{n-s-1} - 2 \cdot a_2 \cdot \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{1 . s} \cdot \tau_{n-s-1} -$$

$$- \ldots\ldots - n \cdot a_n \cdot \sum_{0 . n-1}^{s} \varepsilon_{n-1 . s} \cdot \tau_{n-s-1}$$

El segundo miembro de esta igualdad es función cuadrática de las variables t y τ que puede ponerse bajo la forma

$$\textbf{(3)}\qquad S(y \cdot z \cdot x) = \sum_{0 . n-1}^{h . k} C_{h . k} \cdot \tau_k \cdot t_h$$

y en donde $C_{h . k} = C_{k . h}$ á causa de la simetría de (2) con relación á z é y.

Cuando en (3) se haga $t = \tau$ ó bien $y = z$, tendremos entonces el valor de la sylvesteriana

$$C = S(y^2 \cdot x) = \sum_{0 . n-1}^{h\ k} C_{h . k} \cdot t_h \cdot t_k$$

Los coeficientes $C_{h . k}$ son de segundo grado con relación á los a_i de la función dada : sus valores se calculan en virtud de la igualdad

$$y \cdot z = \sum_{0 . n-1}^{h . k} f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1} \cdot t_h \cdot \tau_k$$

de donde se deduce

$$S(y \cdot z \cdot x) = \sum_{0\ n-1}^{h . k} S(x f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1}) \cdot t_h \cdot \tau_k$$

luego

$$C_{h.k} = S(x \cdot f_{n-h-1} \cdot f_{n-k-1})$$

El determinante Δ_c de la sylvesteriana C se obtiene multiplicando los dos determinantes

$$\begin{vmatrix} f_0(x_1) & f_1(x_1) \dots f_{n-1}(x_1) \\ f_0(x_2) & f_1(x_2) \dots f_{n-1}(x_2) \\ f_0(x_3) & f_1(x_3) \dots f_{n-1}(x_3) \\ \dots & \dots \\ f_0(x_n) & f_1(x_n) \dots f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 f_0(x_1) & x_1 \cdot f_1(x_1) \dots x_1 f_{n-1}(x_1) \\ x_2 f_0(x_2) & x_2 \cdot f_1(x_2) \dots x_2 f_{n-1}(x_2) \\ x_3 f_0(x_3) & x_3 \cdot f_1(x_3) \dots x_3 f_{n-1}(x_3) \\ \dots & \dots \\ x_n f_0(x_n) & x_n \cdot f_1(x_n) \dots x_n f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

cuyo producto vale $x_1 . x_2 . x_3 \dots . x_n . a_0^{2n} . P^2 = \Delta_c$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots . x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \dots . x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 \dots . x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots . x_n^{n-1} \end{vmatrix} = P$$

Pero según se sabe

$$x_1 \cdot x_2 \dots . x_n = (-1)^n . \frac{a_n}{a_0}$$

$$P^2 = \frac{D}{a_0^{2n-2}}$$

luego

$$\Delta_c = (-1)^n . a_0 . a_n . D$$

representando D el discriminante de $f(x)$.

El determinante de la sylvesteriana de $f(x)$ *es igual en valor absoluto al discriminante de la función multiplicado por el primero,* a_0, *y último,* a_n, *coeficiente.* (Corral.)

Ejemplos.—I.—Sea la función de tercer grado

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 . x + a_3 = 0$$

por lo que tendremos aplicando las fórmulas (5) del § 42,

$$\begin{array}{l|l}
\mathcal{E}_{0.0} = a_0 \cdot t_2 & -\, a_1 \cdot \tau_2 \\
\mathcal{E}_{1.0} = a_0 \cdot t_1 & -\, 2\, a_2 \cdot \tau_2 \\
\mathcal{E}_{2.0} = a_0 \cdot t_0 & -\, 3\, a_3 \cdot \tau_2 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.1} = -\, a_2 \cdot t_1 - a_3 \cdot t_0 & -\, a_1 \;\; \tau_1 \\
\mathcal{E}_{1.1} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1 & -\, 2\, a_2 \cdot \tau_1 \\
\mathcal{E}_{2.1} = a_0 \cdot t_1 + a_1 \cdot t_0 & -\, 3\, a_3 \cdot \tau_1 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.2} = -\, a_3 \cdot t_1 & -\, a_1 \cdot \tau_0 \\
\mathcal{E}_{1.2} = -\, a_3 \cdot t_0 & -\, 2 \;\; a_2 \cdot \tau_0 \\
\mathcal{E}_{2.2} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1 + a_2 \cdot t_0 & -\, 3 \;\; a_3 \cdot \tau_0
\end{array}$$

Multiplicando cada una de estas expresiones por la cantidad que tiene á su derecha, y sumando luego los resultados obtenidos, se encuentra

$$\begin{array}{ll}
C_{2.2} = -\, a_1 \cdot a_0 & C_{0.1} = -\, 2\, a_1 \cdot a_3 \\
C_{1.1} = -\, (a_1 \,.\, a_2 + 3\, a_3 \cdot a_0) & C_{1.2} = -\, 2\, a_2 \cdot a_0 \\
C_{0.0} = -\, a_2 \,.\, a_3 & C_{0.2} = -\, 3\, a_0 \cdot a_3
\end{array}$$

II.—Cuando $n = 4$ la función es

$$f(x) = a_0 \,.\, x^4 + a_1 \,.\, x^3 + a_2 \,.\, x^2 + a_3 \;\; x + a_4$$

y entonces tendremos

$$\begin{array}{l|l}
\mathcal{E}_{0.0} = a_0 \cdot t_3 & -\, a_1 \cdot \tau_3 \\
\mathcal{E}_{1.0} = a_0 \cdot t_2 & -\, 2\, a_2 \cdot \tau_3 \\
\mathcal{E}_{2.0} = a_0 \cdot t_1 & -\, 3 \,.\, a_3 \;\; \tau_3 \\
\mathcal{E}_{3.0} = a_0 \cdot t_0 & -\, 4 \,.\, a_4 \cdot \tau_3 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.1} = -\, a_2 \cdot t_2 - a_3 \cdot t_1 - a_4 \cdot t_0 & -\, a_1 \cdot \tau_2 \\
\mathcal{E}_{1.1} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \; t_2 & -\, 2 \,.\, a_2 \cdot \tau_2 \\
\mathcal{E}_{2.1} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \; t_1 & -\, 3 \,.\, a_3 \cdot \tau_2 \\
\mathcal{E}_{3.1} = a_0 \cdot t_1 + a_1 \; t_0 & -\, 4 \,.\, a_4 \cdot \tau_2 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.2} = -\, a_3 \cdot t_2 - a_4 \cdot t_1 & -\, a_1 \cdot \tau_1 \\
\mathcal{E}_{1.2} = -\, a_3 \; t_1 - a_4 \cdot t_0 & -\, 2 \,.\, a_2 \cdot \tau_1 \\
\mathcal{E}_{2.2} = a_0 \; t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1 & -\, 3 \,.\, a_3 \cdot \tau_1 \\
\mathcal{E}_{3.2} = a_0 \; t_2 + a_1 \; t_1 + a_2 \; t_0 & -\, 4 \,.\, a_4 \cdot \tau_1 \\
\hline
\mathcal{E}_{0.3} = -\, a_4 \cdot t_2 & -\, a_1 \cdot \tau_0 \\
\mathcal{E}_{1.3} = -\, a_4 \cdot t_1 & -\, 2\, a_2 \cdot \tau_0 \\
\mathcal{E}_{2.3} = -\, a_4 \;\; t_0 & -\, 3 \,.\, a_3 \cdot \tau_0 \\
\mathcal{E}_{\;\;3} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2 \cdot t_1 + a_3 \cdot t_0 & -\, 4 \,.\, a_4 \cdot \tau_0
\end{array}$$

por lo que realizando operaciones se encontrará

$$C_{3.3} = -\, a_1 \cdot a_0$$
$$C_{2.2} = -\, (a_1 \cdot a_2 + 3 \cdot a_0 \cdot a_3)$$
$$C_{1.1} = -\, (a_2 \cdot a_3 + 3\, a_1 \cdot a_4)$$
$$C_{0.0} = -\, a_3 \cdot a_4$$
$$C_{0.1} = -\, 2\, a_2 \cdot a_4$$
$$C_{0.2} = -\, 3 \cdot a_1 \cdot a_4$$
$$C_{0.3} = -\, 4 \cdot a_0 \cdot a_4$$
$$C_{1.2} = -\, 2 \cdot (a_1\, a_3 + 2\, a_0\, a_4)$$
$$C_{1.3} = -\, 3 \cdot a_0 \cdot a_3$$
$$C_{2.3} = -\, 2 \cdot a_0 \cdot a_2$$

III. —Para la función de quinto grado

$$a_0\, x^5 + a_1\, x^4 + a_2 \cdot x^3 + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x + a_5 = 0$$

se tendrá

$\mathcal{E}_{0.0} = a_0 \cdot t_4$	$-\, a_1 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{1.0} = a_0 \cdot t_3$	$-\, 2\, a_2 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{2.0} = a_0 \cdot t_2$	$-\, 3\, a_3 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{3.0} = a_0 \cdot t_1$	$-\, 4 \cdot a_4 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{4.0} = a_0 \cdot t_0$	$-\, 5 \cdot a_5 \cdot \tau_4$
$\mathcal{E}_{0.1} = -\, a_2 \cdot t_3 - a_3 \cdot t_2 - a_4 \cdot t_1 - a_5 \cdot t_0$	$-\, a_1 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{1.1} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3$	$-\, 2\, a_2 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{2.1} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2$	$-\, 3 \cdot a_3 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{3.1} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1$	$-\, 4 \cdot a_4 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{4.1} = a_0 \cdot t_1 + a_1 \cdot t_0$	$-\, 5 \cdot a_5 \cdot \tau_3$
$\mathcal{E}_{0.2} = -\, a_3 \cdot t_3 - a_4 \cdot t_2 - a_5 \cdot t_1$	$-\, a_1 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{1.2} = -\, a_3 \cdot t_2 - a_4\, t_1 - a_5 \cdot t_0$	$-\, 2\, a_2 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{2.2} = a_0 \cdot t_4 + a_1\, t_3 + a_2\, t_2$	$-\, 3\, a_3 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{3.2} = a_0 \cdot t_3 + a_1\, t_2 + a_2 \cdot t_1$	$-\, 4 \cdot a_4 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{4.2} = a_0 \cdot t_2 + a_1 \cdot t_1 + a_2\, t_0$	$-\, 5 \cdot a_5 \cdot \tau_2$
$\mathcal{E}_{0.3} = -\, a_4\, t_3 - a_5 \cdot t_2$	$-\, a_1 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{1.3} = -\, a_4\, t_2 - a_5 \cdot t_1$	$-\, 2\, a_2 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{2.3} = -\, a_4 \cdot t_1 - a_5 \cdot t_0$	$-\, 3 \cdot a_3 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{3.3} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3 + a_2 \cdot t_2 + a_3 \cdot t_1$	$-\, 4 \cdot a_4 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{4.3} = a_0 \cdot t_3 + a_1 \cdot t_2 + a_2\, t_1 + a_3 \cdot t_0$	$-\, 5 \cdot a_5 \cdot \tau_1$
$\mathcal{E}_{0.4} = -\, a_5 \cdot t_3$	$-\, a_1 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{1.4} = -\, a_5 \cdot t_2$	$-\, 2\, a_2 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{2.4} = -\, a_5 \cdot t_1$	$-\, 3 \cdot a_3 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{3.4} = -\, a_5 \cdot t_0$	$-\, 4 \cdot a_4 \cdot \tau_0$
$\mathcal{E}_{4.4} = a_0 \cdot t_4 + a_1 \cdot t_3 + a_2 \cdot t_2 + a_3 \cdot t_1 + a_4 \cdot t_0$	$-\, 5 \cdot a_5 \cdot \tau_0$

pudiendo deducirse

$$C_{4.4} = -a_1 \cdot a_0 \qquad C_{0.3} = -4\,a_1 \cdot a_5$$
$$C_{3.3} = -(a_1\,a_2 + 3\,a_0 \cdot a_3) \qquad C_{0.4} = -5\,a_0 \cdot a_5$$
$$C_{2.2} = -(a_2 \cdot a_3 + 3\,a_1 \cdot a_4 + 5\,a_0 \cdot a_5) \qquad C_{1.2} = -2\,(a_2\,a_4 + 2\,a_1\,a_5)$$
$$C_{1.1} = -(a_3 \cdot a_4 + 3\,a_2 \cdot a_5) \qquad C_{1.3} = -(3\,a_1\,a_4 + 5\,a_0 \cdot a_5)$$
$$C_{0.0} = -a_4 \cdot a_5 \qquad C_{1.4} = -4\,a_0 \cdot a_4$$
$$C_{0.1} = -2 \cdot a_3 \cdot a_5 \qquad C_{2.3} = -2\,(a_1\,a_3 + 2\,a_0\,a_4)$$
$$C_{0.2} = -3\,a_2 \cdot a_5 \qquad C_{2.4} = -3\,a_0 \cdot a_3$$

$$C_{3.4} = -2\,a_0 \cdot a_2$$

§ 45.—Significación de la sylvesteriana.

Teorema I.—*La sylvesteriana C de una función $f(x)$ siendo descompuesta en una suma de α cuadrados positivos y β cuadrados negativos de funciones lineales y reales, se tendrá que el número de raíces distintas de la ecuación $f(x) = 0$ vale $\alpha + \beta$; mientras que la diferencia entre el número de raíces reales positivas y el de raíces negativas, será igual á $\alpha - \beta$.* (Corral.)

La sylvesteriana es una forma cuadrática de las n variables t_0, $t_1, t_2 \ldots\ldots t_{n-1}$ con coeficientes que se expresan racionalmente en función de los coeficientes de $f(x)$.

Según hemos visto

$$C = S(y^2 . x) = x_1\,y_1^2 + x_2 \cdot y_2^2 + \ldots\ldots + x_n \cdot y_n^2 = \Psi(t_0, t_1 \ldots\ldots t_{n-1})$$

de modo que la sylvesteriana se descompone en tantos cuadrados de funciones lineales independientes como raíces distintas tiene $f(x) = 0$.

Cuando x_1 y x_2 son dos raíces imaginarias conjugadas, se tendrá

$$y_1 \cdot \sqrt{x_1} = u + i \cdot v$$

$$y_2 \cdot \sqrt{x_2} = u - i \cdot v$$

pues entonces y_1, y_2 son también imaginarias conjugadas; de modo que

$$x_1 \cdot y_1^2 + x_2 \cdot y_2^2 = 2\,u^2 - 2\,v^2$$

De todo lo expuesto se deduce que el número α de cuadrados positivos de la sylvesteriana será la suma del número de raíces reales positivas y distintas de $f(x) = 0$, aumentado en el número de pares de raíces imaginarias distintas de la misma ecuación; así como el número β de cuadrados negativos de C es igual á la suma del número de raíces negativas distintas de $f(x) = 0$, incrementada en el número de pares de raíces imaginarias diferentes.

Llamando

r_n = número de raíces reales negativas y diferentes de $f(x) = 0$
r_p = » » » positivas » » $f(x) = 0$
p_i = número de pares de raíces imaginarias distintas de $f(x) = 0$

se tendrá

$$\alpha = r_p + p_i \qquad \beta = r_n + v_i$$

luego conforme al enunciado

$$\alpha - \beta = r_p - r_n$$

Cuando el determinante Δ_c de C y por consecuencia el discriminante D de $f(x)$ no sean nulos, entonces

$$\alpha + \beta = n$$

§ 46.—Ejemplos numéricos.

Problema.—*Dada una ecuación $f(x) = 0$ encontrar el número de sus raíces reales distintas, positivas y negativas, así como el número de sus raíces imaginarias diferentes.*

Calculando la sylvesteriana y la bezoutiana de la función $f(x)$, se encuentran los elementos que resuelven el problema.

Designemos por

r = número total de raíces reales diferentes de $f(x) = 0$
i = » » » imaginarias distintas de $f(x) = 0$
r_n = número de raíces negativas diferentes de $f(x) = 0$
r_p = » » positivas » » »
π = número de cuadrados positivos de la bezoutiana
ν = » » negativos » »
α = número de cuadrados positivos de la sylvesteriana
β » » negativos » »

Según ya hemos demostrado

$$\pi + \nu = r + i = \alpha + \beta$$
$$\pi - \nu = r = r_n + r_p$$
$$\alpha - \beta = r_p - r_n$$
$$i = 2 . \nu$$

luego deduciremos

(1) $$r_p = \frac{1}{2} (\pi + \alpha - \beta - \nu) = \pi - \beta = \alpha - \nu$$

(2) $$r_n = \frac{1}{2} (\pi + \beta - \nu - \alpha) = \pi - \alpha = \beta - \nu$$

(3) $$i = 2 . \nu$$

fórmulas que resuelven el problema, permitiendo calcular r_p, r_n, i conocidas las cantidades π, ν, α, β. (Corral.)

El número de cuadrados positivos y negativos en que se descompone una forma cuadrática, puede calcularse directamente por medio de la serie de menores principales de su determinante ó discriminante. Puede entonces ocurrir dos casos:

1.° *Que dicho determinante sea diferente de cero.* El número de cuadrados positivos de la forma es igual al número de permanencias de la serie de menores; mientras que la totalidad de cuadrados negativos está dada por el número de variaciones que presenta dicha misma serie. [Weber, páginas 303 á 306.]

2.° *Que el discriminante sea nulo.* El número de variaciones de la serie de menores principales es igual al número ν de cuadrados negativos de la forma cuadrática. Llamando ρ el número de términos nulos consecutivos de la serie, la totalidad π de cuadrados positivos valdrá $n - \nu - \rho$. [Weber, páginas 308 y 309.]

Ejemplos: I.—Sea la ecuación

$$x^3 - 7x + 7 = 7$$

en la cual

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -7 \qquad a_3 = 7$$

luego

$B_{2.2} = 3$ $B_{0.1} = -21$
$B_{1.1} = 14$ $B_{1.2} = 0$
$B_{0.0} = 49$ $B_{0.2} = -7$

siendo el determinante de la bezoutiana

$$\begin{vmatrix} B_{0.0} & B_{0.1} & B_{0.2} \\ B_{1.0} & B_{1.1} & B_{1.2} \\ B_{2.0} & B_{2.1} & B_{2.2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & -21 & -7 \\ -21 & 14 & 0 \\ -7 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

La serie de menores principales es, pues,

$$1 \qquad +49 \qquad +245 \qquad +49$$

por lo cual

$$\pi = 3 \qquad \nu = 0 \qquad i = 0$$

es decir que la ecuación dada no tiene raíces imaginarias, siendo las tres reales. Para averiguar ahora cuántas son positivas y cuántas negativas calcularemos la sylvesteriana, cuyos coeficientes son

$C_{2.2} = 0$ $C_{0.1} = 0$
$C_{1.1} = -21$ $C_{1.2} = 14$
$C_{0.0} = 49$ $C_{0.2} = -21$

El determinante á considerar

$$\begin{vmatrix} C_{0.0} & C_{0.1} & C_{0.2} \\ C_{1.0} & C_{1.1} & C_{1.2} \\ C_{2.0} & C_{2.1} & C_{2.2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 49 & 0 & -21 \\ 0 & -21 & 14 \\ -21 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

da la siguiente serie de menores

$$1 \qquad +49 \qquad -1.029 \qquad -343$$

de modo que

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 1$$

Las fórmulas (1) y (2) nos dan

$$r_p = 2 \qquad r_n = 1$$

es decir, que la ecuación tiene dos raíces reales positivas y una raíz real negativa.

II.—Consideremos la ecuación

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -2 \qquad a_3 = -5$$

por lo cual

$$B_{2.2} = 3 \qquad B_{0.1} = 15$$
$$B_{1.1} = 4 \qquad B_{1.2} = 0$$
$$B_{0.0} = 4 \qquad B_{0.2} = -2$$

El determinante de la bezoutiana será

$$\begin{vmatrix} 4 & 15 & -2 \\ 15 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

y su serie de menores principales vale

$$1 \qquad 4 \qquad -209 \qquad -643$$

razón por la cual

$$\pi = 2 \qquad \nu = 1 \qquad i = 2\nu = 2$$

es decir, que la ecuación dada tiene $\pi - \nu = 1$ raíz real y dos imaginarias.

Para saber si la raíz real es positiva ó negativa, calcularemos la función sylvesteriana. Tenemos entonces

$$C_{2.2} = 0 \qquad C_{0.1} = 0$$
$$C_{1.1} = 15 \qquad C_{1.2} = 4$$
$$C_{0.0} = -10 \qquad C_{0.2} = 15$$

siendo el determinante correspondiente

$$\begin{vmatrix} -10 & 0 & 15 \\ 0 & 15 & 4 \\ 15 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

por lo que la serie de menores vale

$$1 \qquad -10 \qquad -150 \qquad -3.215$$

luego

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 1$$

De las fórmulas (1) y (2) deduciremos

$$r_p = 1 \qquad r_n = 0$$

lo que nos demuestra es positiva la única raíz real de la ecuación dada.

III.—Estudiemos la ecuación

$$x^4 - 2x^2 + 3x - 1 = 0$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = -2 \qquad a_3 = 3 \qquad a_4 = -1$$

Los coeficientes de su bezoutiana serán

$$B_{3.3} = 4 \qquad B_{0.2} = 4$$
$$B_{2.2} = 4 \qquad B_{0.3} = 3$$
$$B_{1.1} = 12 \qquad B_{1.2} = -9$$
$$B_{0.0} = 5 \qquad B_{1.3} = -4$$
$$B_{0.1} = -6 \qquad B_{2.3} = 0$$

valiendo su determinante

$$\begin{vmatrix} B_{0.0} & B_{0.1} & B_{0.2} & B_{0.3} \\ B_{1.0} & B_{1.1} & B_{1.2} & B_{1.3} \\ B_{2.0} & B_{2.1} & B_{2.2} & B_{2.3} \\ B_{3.0} & B_{3.1} & B_{3.2} & B_{3.3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -6 & 4 & 3 \\ -6 & 12 & -9 & -4 \\ 4 & -9 & 4 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

La serie de menores principales es, pues,

$$1 \qquad 5 \qquad 24 \qquad -69 \qquad -331$$

de donde

$$\pi = 3 \qquad \nu = 1 \qquad i = 2$$

así es que la ecuación tiene dos raíces reales y dos imaginarias. Para precisar el signo de aquéllas, calculemos los coeficientes de la sylvesteriana

$$C_{3.3} = 0 \qquad C_{0.2} = 0$$
$$C_{2.2} = -9 \qquad C_{0.3} = 4$$
$$C_{1.1} = 6 \qquad C_{1.2} = 4$$

$$C_{0.0} = 3 \qquad\qquad C_{1.3} = -9$$
$$C_{0.1} = -4 \qquad\qquad C_{2.3} = 4$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} C_{0.0} & C_{0.1} & C_{0.2} & C_{0.3} \\ C_{1.0} & C_{1.1} & C_{1.2} & C_{1.3} \\ C_{2.0} & C_{2.1} & C_{2.2} & C_{2.3} \\ C_{3.0} & C_{3.1} & C_{3.2} & C_{3.3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -9 \\ 0 & 4 & -9 & 4 \\ 4 & -9 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

La serie de menores principales valdrá

$$1, \qquad 3, \qquad 2, \qquad -66, \qquad +331$$

de modo que

$$\alpha = 2 \qquad\qquad \beta = 2$$

luego en definitiva

$$r_p = 1 \qquad\qquad r_n = 1$$

lo que prueba la existencia de una raíz real positiva y otra negativa.

IV.—Sea la ecuación completa

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \qquad a_2 = -4 \qquad a_3 = -4 \qquad a_4 = 1$$

por lo que los coeficientes de su bezoutiana valdrán

$$B_{3.3} = 4 \qquad\qquad B_{0.2} = -8$$
$$B_{2.2} = 11 \qquad\qquad B_{0.3} = -4$$
$$B_{1.1} = 36 \qquad\qquad B_{1.2} = 4$$
$$B_{0.0} = 24 \qquad\qquad B_{1.3} = -8$$
$$B_{0.1} = 13 \qquad\qquad B_{2.3} = 3$$

el determinante á considerar

$$\begin{vmatrix} 24 & 13 & -8 & -4 \\ 13 & 36 & 4 & -8 \\ -8 & 4 & 11 & 3 \\ -4 & -8 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

tiene la serie de menores principales

$$1 , \quad 24 , \quad 695 , \quad 4.125 , \quad 1.125$$

por lo cual

$$\pi = 4 \qquad \nu = 0 \qquad i = 0$$

que indica son reales todas las raíces de la ecuación dada.

Los coeficientes de la sylvesteriana son

$$C_{3.3} = -1 \qquad C_{0.2} = -3$$
$$C_{2.2} = 16 \qquad C_{0.3} = 16$$
$$C_{1.1} = -19 \qquad C_{1.2} = 4$$
$$C_{0.0} = 4 \qquad C_{1.3} = 12$$
$$C_{0.1} = 8 \qquad C_{2.3} = 8$$

luego el determinante respectivo vale

$$\begin{vmatrix} 4 & 8 & -3 & -4 \\ 8 & -19 & 4 & 12 \\ -3 & 4 & 16 & 8 \\ -4 & 12 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

con su serie de menores principales

$$1 , \quad 4 , \quad -140 , \quad -2.325 , \quad +1.125$$

Así tendremos

$$\alpha = 2 \qquad \beta = 2$$

y las fórmulas (1) y (2) darán

$$r_p = 2 \qquad r_n = 2$$

que demuestra la existencia de dos raíces positivas y dos negativas.

V.—Consideremos finalmente la ecuación de quinto grado

$$x^5 + x^2 - 1 = 0.$$

en donde

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \qquad a_3 = 1 \qquad a_4 = 0 \qquad a_5 = -1$$

Los coeficientes de la bezoutiana son

$B_{4.4} = 5$ $B_{0.3} = 5$
$B_{3.3} = 0$ $B_{0.4} = 0$
$B_{2.2} = 0$ $B_{1.2} = 5$
$B_{1.1} = 2$ $B_{1.3} = 0$
$B_{0.0} = 2$ $B_{1.4} = 2$
$B_{0.1} = 0$ $B_{2.3} = -3$
$B_{0.2} = 0$ $B_{2.4} = 0$

$$B_{3.4} = 0$$

valiendo su determinante

$$\begin{vmatrix} B_{0.0} & B_{0.1} & B_{0.2} & B_{0.3} & B_{0.4} \\ B_{1.0} & B_{1.1} & B_{1.2} & B_{1.3} & B_{1.4} \\ B_{2.0} & B_{2.1} & B_{2.2} & B_{2.3} & B_{2.4} \\ B_{3.0} & B_{3.1} & B_{3.2} & B_{3.3} & B_{3.4} \\ B_{4.0} & B_{4.1} & B_{4.2} & B_{4.3} & B_{4.4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

cuya serie de menores

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad -50, \quad +589, \quad +3.017$$

da

$$\pi = 3 \qquad \nu = 2 \qquad i = 4$$

La ecuación tiene cuatro raíces imaginarias y una sola real. Para determinar el signo de ésta, escribiremos los coeficientes de la sylvesteriana

$C_{4.4} = 0$ $C_{0.3} = 0$
$C_{3.3} = -3$ $C_{0.4} = 5$
$C_{2.2} = 5$ $C_{1.2} = 0$
$C_{1.1} = 0$ $C_{1.3} = 5$
$C_{0.0} = 0$ $C_{1.4} = 0$
$C_{0.1} = 2$ $C_{2.3} = 0$
$C_{0.2} = 0$ $C_{2.4} = -3$

$$C_{3.4} = 0$$

cuyo determinante es

$$\begin{vmatrix} C_{0.0} & C_{0.1} & C_{0.2} & C_{0.3} & C_{0.4} \\ C_{1.0} & C_{1.1} & C_{1.2} & C_{1.3} & C_{1.4} \\ C_{2.0} & C_{2.1} & C_{2.2} & C_{2.3} & C_{2.4} \\ C_{3.0} & C_{3.1} & C_{3.2} & C_{3.3} & C_{3.4} \\ C_{4.0} & C_{4.1} & C_{4.2} & C_{4.3} & C_{4.4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

La serie de menores correspondiente vale

$$1 , \quad 0 , \quad -4 , \quad -20 , \quad 60 , \quad 3\,017$$

luego

$$\alpha = 3 \qquad \beta = 2$$

por lo que se deduce

$$r_p = 1 \qquad r_n = 0$$

que la ecuación tiene una raíz real positiva

§ 47.—Transformación de Hermite.

La transformación de Hermite es una forma especial, muy favorable, que puede darse á la transformación general de Tschirnhausen y es utilizada para simplificar una ecuación.

Consideremos la sustitución

$$(1) \qquad y = t_{n-1} \cdot x \cdot f_0(x) + t_{n-2} \cdot x f_1(x) + \ldots\ldots + \\ + t_1 \cdot x \cdot f_{n-2}(x) + t_0 \cdot x \cdot f_{n-1}(x)$$

de donde

$$(2) \quad \begin{cases} f_0(x) = a_0 \\ f_1(x) = a_0 x + a_1 \\ f_2(x) = a_0 x^2 + a_1 \cdot x + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-2}(x) = a_0 x^{n-2} + a_1 \cdot x^{n-3} + \ldots\ldots + a_{n-3} x + a_{n-2} \\ f_{n-1}(x) = a_0 x^{n-1} + a_1 \cdot x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x + a_{n-1} \end{cases}$$

y en la cual las variables t_i son indeterminadas. Cuando en (1) se reemplaza t_k por t^k, el valor de y es idéntico á

$$(3) \qquad x \cdot \frac{f(t)}{t-x} = x \cdot t^{n-1} \cdot f_0(x) + x \cdot t^{n-2} \cdot f_1(x) + \ldots\ldots + \\ + x \cdot t \cdot f_{n-2}(x) + x \cdot f_{n-1}(x)$$

Sumando lós valores de y obtenidos de poner en vez de x las n raíces de

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 \; x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

se obtendrá

$$(4) \qquad S(y) = -a_1 \cdot t_{n-1} - 2 \cdot a_2 \cdot t_{n-2} - 3 \cdot a_3 \cdot t_{n-3} - \ldots\ldots - (n-1)\, a_{n-1} \cdot t_1 - n\, a_n \cdot t_0$$

si recordamos las relaciones ya demostradas

$$(5) \quad \begin{cases} S\,[x \cdot f_0(x)] = -a_1 \\ S\,[x \cdot f_1(x)] = -2\,a_2 \\ S\,[x\; f_2(x)] = -3 \cdot a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S\,[x \cdot f_{n-2}(x)] = -(n-1)\, a_{n-1} \\ S\,[x \cdot f_{n-1}(x)] = -n\;\; a_n \end{cases}$$

Puede observarse que $S\,(y)$ es igual á $-E_1 f\,(t)$

$$-E_1\, f(t) = -a_1 \cdot t^{n-1} - 2\,a_2 \cdot t^{n-2} - 3\,a_3 \cdot t^{n-3} \cdot - \ldots\ldots - (n-1)\, a_{n-1} \cdot t - n\, a_n$$

cuando se sustituye t_k por t^k.

Teniendo en cuenta que

$$x \cdot f_{n-1}(x) + a_n = 0$$

deduciremos

$$(6) \quad y - \frac{1}{n} \cdot S(y) = t_{n-1}\left[x \cdot f_0 + \frac{a_1}{n}\right] + t_{n-2}\left[x \cdot f_1 + \frac{2\,a_2}{n}\right] + \ldots\ldots + \left[x \cdot f_{n-2} + \frac{n-1}{n}\; a_{n-1}\right] \cdot t_1$$

habiéndose así eliminado t_0. Llamando

$$(7) \quad \begin{cases} F_0 = x \cdot f_0 + \dfrac{a_1}{n} = a_0\;\; x + \dfrac{a_1}{n} \\ F_1 = x \cdot f_1 + \dfrac{2\,a_2}{n} = a_0\, x^2 + a_1\, x + \dfrac{2\,a_2}{n} \\ F_2 = x \cdot f_2 + \dfrac{3\,a_3}{n} = a_0\, x^3 + a_1\, x^2 + a_2 \cdot x + \dfrac{3\,a_3}{n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_{n-2} = x \cdot f_{n-2} + \dfrac{n-1}{n} \cdot a_{n-1} = a_0\, x^{n-1} + a_1\, x^{n-2} + \ldots\ldots + \dfrac{n-1}{n} \cdot a_{n-1} \end{cases}$$

se tendrá

$$(8)\quad y - \frac{1}{n} \cdot S(y) = t_{n-1} \cdot F_0(x) + t_{n-2} \cdot F_1(x) + \ldots\ldots + t_1 \cdot F_{n-2}(x)$$

Es fácil comprobar que

$$(9)\quad \begin{cases} S\,[F_0(x)] = 0 \\ S\,[F_1(x)] = 0 \\ S\,[F_2(x)] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ S\,[F_{n-2}(x)] = 0 \end{cases}$$

Hagamos ahora

$$(10)\quad F(t\,.\,x) = \frac{x\,.\,f(t)}{t-x} + \frac{1}{n} \cdot E_1\, f(t) = t^{n-1} \cdot F_0(x) + t^{n-2} \cdot F_1(x) + \\ + \ldots\ldots + t \cdot F_{n-2}(x)$$

expresión que es idéntica á (8) cuando en vez de t^k se pone t_k.

Llegamos así á la transformación de Hermite

$$z = t_{n-1} \cdot F_0(x) + t_{n-2} \cdot F_1(x) + \ldots\ldots + t_1 \cdot F_{n-2}(x)$$

que goza de la propiedad

$$S(z) = 0$$

Para más desarrollos sobre tan notable transformación, véase la obra de Weber, páginas 254 á 281.

§ 48.—**Raíces comunes á dos ecuaciones.**

Teorema I.—*Si* $V = 0$ *expresa la condición para que dos ecuaciones algebraicas*

$$f(x) = x^m + p_1\, x^{m-1} + p_2 \cdot x^{m-2} + p_3 \cdot x^{m-3} + \ldots\ldots + p_{m-1} \cdot x + p_m = 0$$

$$F(x) = x^n + q_1 \cdot x^{n-1} + q_2\, x^{n-2} + q_3 \cdot x^{n-3} + \ldots\ldots + q_{n-1} \cdot x + q_n = 0$$

tengan una raíz común y designamos por α *la inversa* $\frac{1}{p_m}$ *del término independiente de la primera, y por* β *la inversa* $\frac{1}{q_n}$ *del último término de la segunda, las dos ecuaciones dadas podrán ponerse bajo las formas siguientes:*

$$(1)\quad f(x) = \alpha \, . \, x^m + p_1 \, . \, \alpha \, . \, x^{m-1} + p_2 \, . \, \alpha \, . \, x^{m-2} + p_3 \, . \, \alpha \, . \, x^{m-3} + \ldots\ldots + p_{m-1} \, . \, \alpha \, . \, x + 1 = 0$$

$$(2)\quad F(x) = \beta \, . \, x^n + q_1 \, . \, \beta \, . \, x^{n-1} + q_2 \, . \, \beta \, . \, x^{n-2} + q_3 \, . \, \beta \, . \, x^{n-3} + \ldots\ldots + q_{n-1} \, . \, \beta \, . \, x + 1 = 0$$

Siendo V una función entera de los coeficientes $p_1, p_2 \ldots\ldots p_{m-1}$, $\alpha, q_1, q_2 \ldots\ldots q_{n-1}, \beta$ *y llamando por* $E_\mu^\alpha V, E_v^\beta V$ *las eulerianas de orden* μ *y de orden* v *del polinomio V tomadas respectivamente con relación á* α y β, *tendremos que las condiciones necesarias para que las ecuaciones dadas tengan dos raíces comunes, serán*

$$V = 0 \qquad\qquad E_1^\alpha V = 0$$

ó bien

$$V = 0 \qquad\qquad E_1^\beta V = 0$$

En general, las condiciones necesarias para la existencia de μ *raíces comunes á las ecuaciones consideradas, serán*

$$V = 0\,, \quad E_1^\alpha V = 0\,, \quad E_2^\alpha V = 0\,, \quad E_3^\alpha V = 0 \ldots\ldots E_{\mu-1}^\alpha V = 0$$

ó bien

$$V = 0\,, \quad E_1^\beta V = 0\,, \quad E_2^\beta V = 0\,, \quad E_3^\beta V = 0 \ldots\ldots E_{\mu-1}^\beta V = 0\,.$$

Este teorema es en el fondo la famosa proposición de Lagrange sobre las condiciones necesarias para que dos ecuaciones tengan varias raíces comunes, y que fué incluída en las Memorias de la Academia de Berlín del año 1770-1771. Le hemos dado la anterior forma para adaptarla á la teoría de las eulerianas.

Llamando $a, b, c \ldots\ldots k, l$ las n raíces de $F(x) = 0$, la función V condicional para la existencia de una raíz común á las ecuaciones $f(x) = 0$ y $F(x) = 0$, se pondrá bajo la forma

$$(3)\qquad V = f(a) \cdot f(b) \cdot f(c) \ldots\ldots f(k) \cdot f(l)$$

Los coeficientes de V son funciones enteras de $p_1, p_2 \ldots\ldots p_{m-1}$, α y como además V es simétrica con relación á las raíces $a, b, c \ldots\ldots k, l$, se podrá en definitiva expresar V por una función entera de $p_1, p_2 \ldots\ldots p_{m-1}, \alpha, q_1, q_2 \ldots\ldots q_{m-1}, q_m$.

Si designamos por a', b' ..... q' las m raíces de $f(x) = 0$, entonces se tendrá también

(4) $$V = F(a') \cdot F(b') \ldots\ldots F(q')$$

siendo fácil deducir que V es una función entera de

$$p_1, p_2 \ldots\ldots p_{m-1}, p_m, q_1, q_2 \ldots\ldots q_{m-1}, \beta.$$

Como las raíces a, b, c, ... k, l son independientes de α, la función $f(x)$ es de primer grado en α, luego

$$E_1^{\alpha} f(a) = 1 \qquad E_1^{\alpha} f(b) = 1 \ldots\ldots E_1^{\alpha} f(l) = 1$$

De un modo análogo se deduce que

$$E_1^{\beta} F(a') = 1 \qquad E_1^{\beta} F(b') = 1 \ldots\ldots E_1^{\beta} F(q') = 1$$

Tomando eulerianas en ambos miembros de (3) con relación á α se tendrá

(5) $$E_1^{\alpha} V = f(b) \cdot f(c) \ldots\ldots f(l) + f(a) \cdot f(c) \ldots\ldots f(l) + \ldots\ldots + \\ + f(a) \cdot f(b) \ldots\ldots f(k)$$

de modo que $E_1^{\alpha} V$ es igual á la suma de los productos tomados $(m - 1)$ á $(m - 1)$ de las cantidades

(6) $$f(a), \qquad f(b), \qquad f(c) \ldots\ldots f(k), \qquad f(l)$$

Si en (5) repetimos lo que se hizo con (3), se deducirá que $\frac{1}{1 \cdot 2} E_2^{\alpha} V$ es la suma de los productos $(m - 2)$ á $(m - 2)$ de las cantidades (6); y en general podemos establecer que $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots \mu} \cdot E_{\mu}^{\alpha} V$ es igual á la suma de los productos $(m - \mu)$ á $(m - \mu)$ de las cantidades (6).

De lo expuesto resulta que la ecuación cuyas raíces son las n cantidades (6), tendrá por expresión

(7) $$X^n - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (n-1)} \cdot E_{n-1}^{\alpha} V \cdot X^{n-1} + \ldots\ldots \mp$$

$$\mp \frac{1}{1.2.3} \cdot E_3^{\alpha} V \cdot X^3 \pm \frac{1}{1.2} \cdot E_2^{\alpha} V \cdot X^2 \mp E_1^{\alpha} V \cdot X \pm V = 0$$

Puede deducirse análogamente que la ecuación cuyas raíces son las m cantidades

$$F(a') \qquad F(b') \ldots\ldots F(q')$$

vale

$$\text{(8)} \quad X^m - \frac{1}{1.2.3\ldots\ldots(m-1)} \cdot E_{m-1}^{\beta} V \cdot X^{m-1} + \ldots\ldots \mp$$

$$\mp \frac{1}{1.2.3} \cdot E_3^{\beta} V \cdot X^3 \pm \frac{1}{1.2} \cdot E_2^{\beta} V \cdot X^2 \mp E_1^{\beta} V \cdot X \pm V = 0$$

Para que μ raíces de la ecuación (2) satisfagan la ecuación (1), es condición necesaria y suficiente que la ecuación (7) tenga μ raíces iguales á cero; es decir, que se verifique

$$V = 0 \qquad E_1^{\alpha} V = 0 \qquad E_2^{\alpha} V = 0 \ldots\ldots E_{\mu-1}^{\alpha} V = 0$$

Análogamente, para que μ raíces de la ecuación (1) lo sean también de (2), será necesario y suficiente que la ecuación (8) tenga μ raíces iguales á cero, ó sea que cumplan las igualdades

$$V = 0 \qquad E_1^{\beta} V = 0 \qquad E_2^{\beta} V = 0 \ldots\ldots E_{\mu-1}^{\beta} V = 0$$

Lo que prueba íntegramente el enunciado.

Teorema II.—*Si* $V = 0$ *expresa la condición para que dos ecuaciones algebraicas*

$$f(x) = x^m + p_1 \cdot x^{m-1} + p_2 \cdot x^{m-2} + p_3 \cdot x^{m-3} + \ldots\ldots + p_{m-1} \cdot x + p_m = 0$$

$$F(x) = x^n + q_1 \cdot x^{n-1} + q_2 \cdot x^{n-2} + q_3 \cdot x^{n-3} + \ldots\ldots + q_{n-1} \cdot x + q_n = 0$$

tengan una raíz común y designamos por $E_{\mu}^{p_m} V$, $E_v^{q_n} V$ *las eulerianas de orden* μ *y de orden* v *del polinomio* V *tomadas respectivamente con relación á* p_m *y á* q_n, *tendremos que las condiciones necesarias para que las ecuaciones dadas tengan dos raíces comunes, serán*

$$V = 0 \qquad E_1^{p_m} V = 0$$

ó bien

$$V = 0 \qquad E_1^{q_n}\, V = 0$$

En general, las condiciones necesarias para la existencia de μ *raíces comunes á las dos ecuaciones consideradas, serán*

$$V = 0 \qquad E_1^{p_m}\, V = 0 \qquad E_2^{p_m}\, V = 0 \,\ldots\ldots\, E_{\mu-1}^{p_m}\, V = 0$$

ó bien

$$V = 0 \qquad E_1^{q_n}\, V = 0 \qquad E_2^{q_n}\, V = 0 \,\ldots\ldots\, E_{\mu-1}^{q_n}\, V = 0 \,. \quad \text{(Corral.)}$$

Esta proposición es una consecuencia inmediata del teorema de Lagrange y de nuestro teorema II del § 13.

Efectivamente, para que las dos ecuaciones $f(x) = 0$ y $F(x) = 0$ tengan μ raíces comunes, es necesario y suficiente que

$$V = 0 \qquad D_{p_m}\, V = 0 \qquad D_{p_m}^{2}\, V = 0 \,\ldots\ldots\, D_{p_m}^{\mu-1}\, V = 0$$

ó bien (Lagrange)

$$V = 0 \qquad D_{q_n}\, V = 0 \qquad D_{q_n}^{2}\, V = 0 \,\ldots\ldots\, D_{q_n}^{\mu-1}\, V = 0$$

Pero de verificarse las anteriores igualdades, como p_m y q_n son diferentes de cero por hipótesis, se tendrá también

$$V = 0 \qquad E_1^{p_m}\, V = 0 \qquad E_2^{p_m} V = 0 \,\ldots\ldots\, E_{\mu-1}^{p_m}\, V = 0$$

é igualmente

$$V = 0 \qquad E_1^{q_n}\, V = 0 \qquad E_2^{q_n}\, V = 0 \,\ldots\ldots\, E_{\mu-1}^{q_n}\, V = 0$$

Ejemplo.—Sean las ecuaciones dadas

$$f(x) = x^3 + p_1 x^2 + p_2 \cdot x + p_3 = 0$$

$$F(x) = x^2 + q_1 x + q_2 = 0$$

á las que aplicaremos el teorema anterior. Las raíces de la segunda, siendo designadas por a y b, se tendrá

$$V=(a^3+p_1 a^2+p_2 a+p_3)\cdot(b^3+p_1 b^2+p_2 b+p_3)$$

y como

$$a+b=-q_1 \qquad\qquad a\cdot b=q_2$$

deduciremos, realizando las operaciones indicadas, que

$$V=p_3^{\;2}+p_3\left[p_1(q_1^{\;2}-2\,q_2)-q_1\cdot p_2-(q_1^{\;3}-3\,q_1\,q_2)\right]+\left[p_2^{\;2}\cdot q_2-\right.$$
$$\left.-p_1\cdot p_2\cdot q_1\cdot q_2+q_2^{\;2}\cdot p_1^{\;2}+p_2(q_1^{\;2}\cdot q_2-2\,q_2^{\;2})-p_1\cdot q_1\cdot q_2^{\;2}+q_2^{\;3}\right]$$

La condicion para que las ecuaciones propuestas tengan una raíz común es que $V=0$; mientras que para ser dos las raíces comunes se necesita satisfacer las dos igualdades

$$V=0 \qquad\qquad E_1^{p_3}\,V=0\,.$$

Ahora bien,

$$(10)\quad E_1^{p_3}\,V=p_3\left[p_1(q_1^{\;2}-2\,q_2)-q_1\cdot p_2-(q_1^{\;3}-3\,q_1\cdot q_2)\right]+2\cdot\left[p_2^{\;2}\cdot q_2-\right.$$
$$\left.-p_1\cdot p_2\cdot q_1\cdot q_2+p_1^{\;2}\cdot q_2^{\;2}+p_2(q_1^{\;2}\cdot q_2-2\cdot q_2^{\;2})-p_1\cdot q_1\cdot q_2^{\;2}+q_2^{\;3}\right]=0$$

por lo que eliminando p_3 entre (9) y (10) se llega á la condición

$$4\left[q_2\cdot p_2^{\;2}-q_1\cdot q_2\cdot p_1\cdot p_2+q_2^{\;2}\cdot p_1^{\;2}+p_2(q_1^{\;2}\cdot q_2-2\,q_2^{\;2})-q_1\cdot q_2^{\;2}\cdot p_1+\right.$$
$$\left.+q_2^{\;3}\right]-\left[p_1(q_1^{\;2}-2\,q_2)-q_1\cdot p_2-(q_1^{\;3}-3\,q_1\cdot q_2)\right]^2=0 \qquad (11)$$

Si efectuamos las operaciones indicadas, se verá que la igualdad (11) toma la forma

$$(4\,q_2-q_1^{\;2})\cdot(q_1^{\;2}-q_2-q_1\cdot p_1+p_2)^2=0$$

que es la condición buscada.

No siendo aceptable que

$$4\,q_2-q_1^{\;2}=0$$

pues las raíces a y b son diferentes entre sí en el caso más general, resultará

$$q_1^{\;2}-q_2-q_1\cdot p_1+p_2=0 \qquad (12)$$

y entonces la ecuación

$$E_1^{p_3} V = 0$$

se transforma en

$$q_2 \cdot (q_1 - p_1) \cdot p_3 + p_1 q_2^2 - p_1 q_1 \cdot q_2^2 + q_2^2 (q_2 - p_2) = 0$$

ó bien

$$q_2 (q_1 - p_1) \cdot p_3 + p_1 q_2^2 + q_2^2 (q_1^2 - p_1 q_1) - p_1 q_1 \ q_2^2 = 0$$

de donde

$$q_2 (q_1 - p_1) \cdot p_3 + q_2^2 (q_1 - p_1)^2 = 0$$

y finalmente

$$p_3 + q_2 q_1 - q_2 p_1 = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

Las igualdades (12) y (13) representan las condiciones á que deben satisfacer los coeficientes de las ecuaciones dadas para que tengan dos raíces comunes.

§ 49.—Desarrollo de $f(n\,x)$ conocidas $f(x)$ y sus eulerianas.

La fórmula ya encontrada

$$f(x+h) = f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^m - E_1 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{h}{x} +$$
$$+ E_2 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot x^2} -$$
$$- E_3 f(x) \cdot \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{m-3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot x^3} + \ldots\ldots$$

nos resuelve el problema.

Haciendo efectivamente $h = (n - 1) \cdot x$ encontraremos

$$f(n \cdot x) = f(x) \cdot n^m - E_1 f(x) \cdot n^{m-1} \cdot \frac{n-1}{1} +$$
$$+ E_2 f(x) \cdot n^{m-2} \cdot \frac{(n-1)^2}{1 \cdot 2} - E_3 f(x) \cdot n^{m-3} \cdot \frac{(n-1)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$$
$$+ E_4 f(x) \cdot n^{m-4} \cdot \frac{(n-1)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots\ldots$$

que es el desarrollo buscado. (Corral.)

En el caso particular de ser $n = 2$ se tendrá

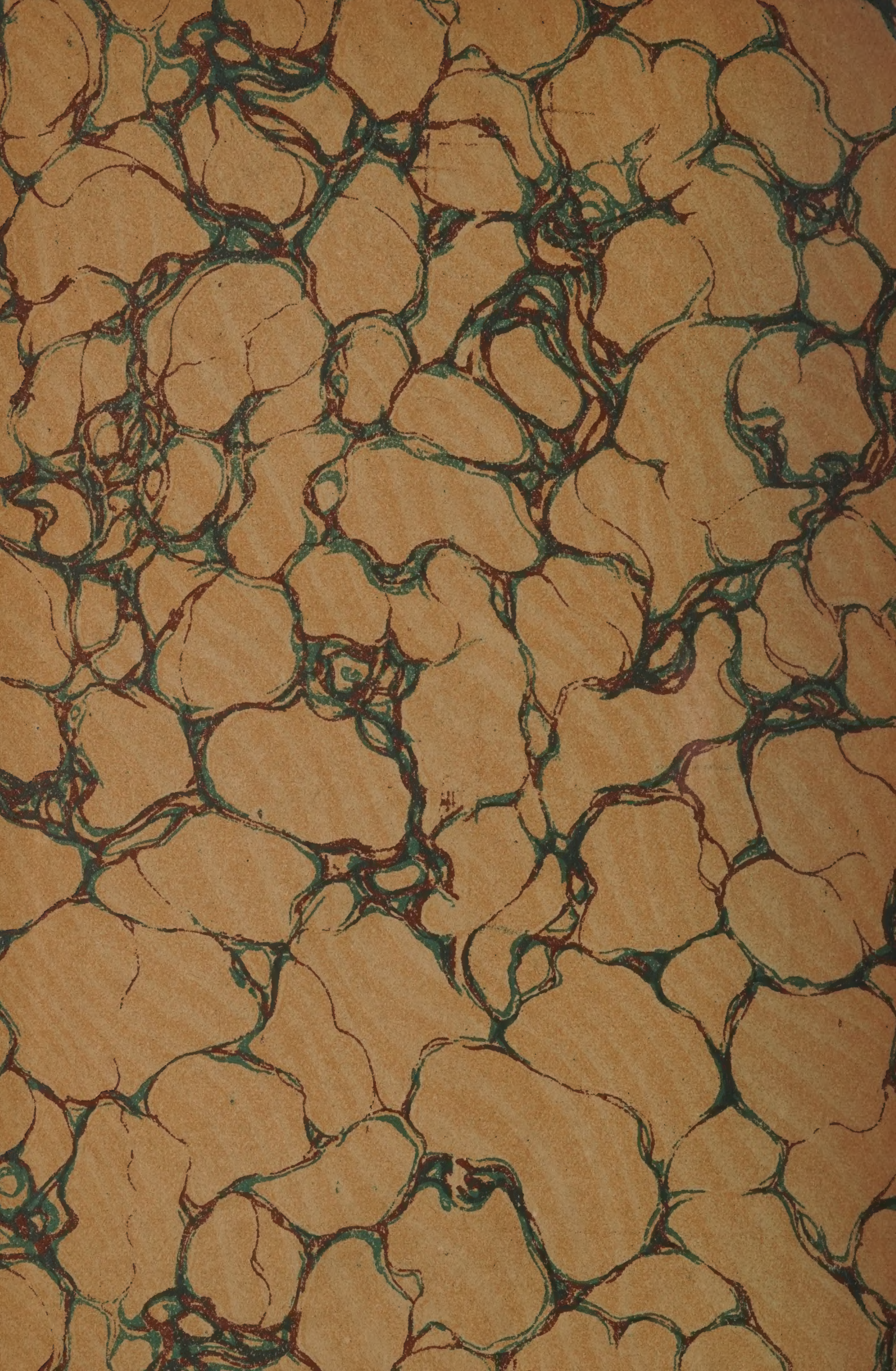
$$f(2x) = 2^m \cdot f(x) - 2^{m-1} \cdot E_1 f(x) + 2^{m-2} \cdot E_2 f(x) \cdot \frac{1}{1 \cdot 2} -$$
$$- \frac{2^{m-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot E_3 f(x) + \ldots\ldots$$

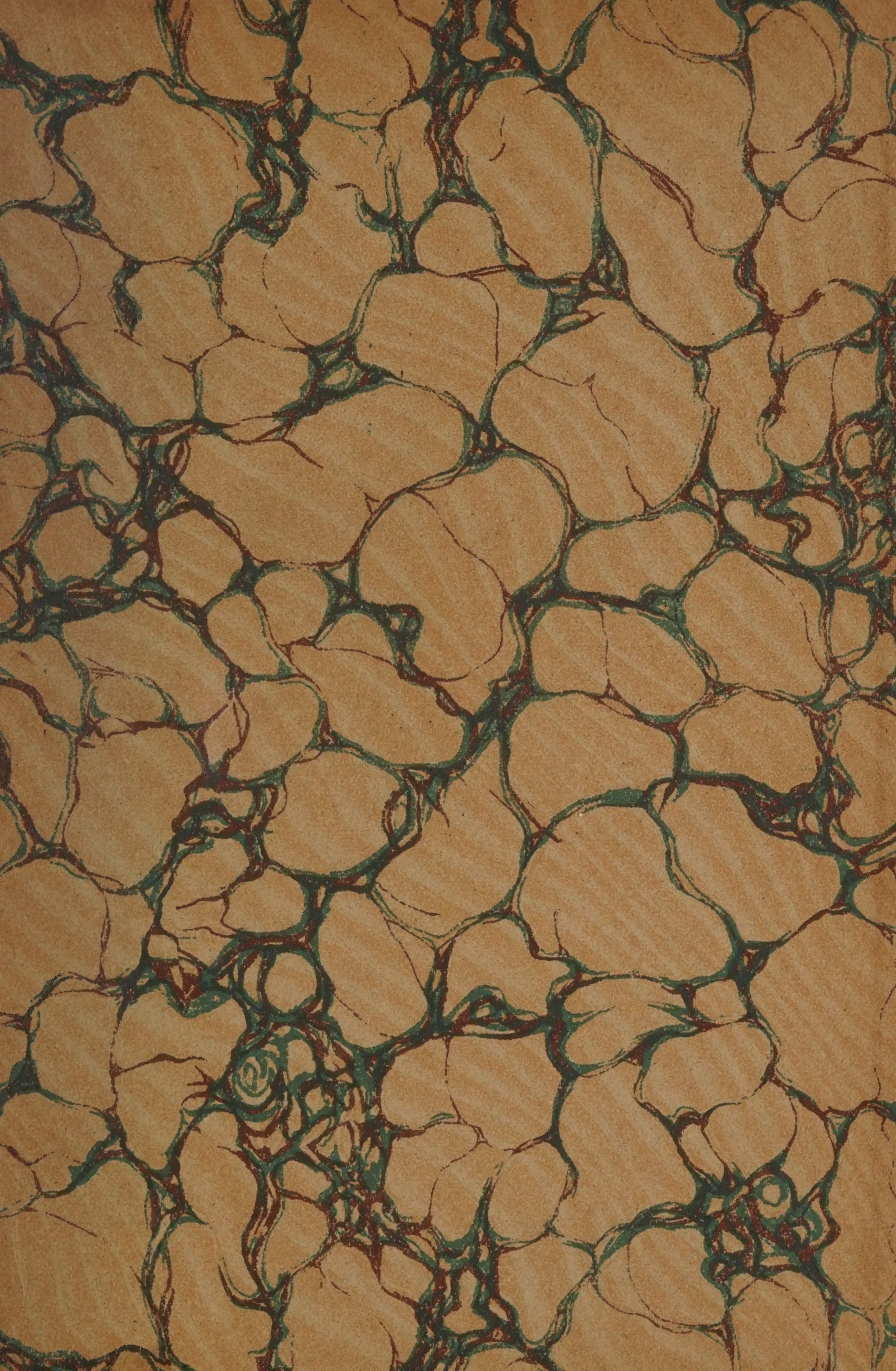
y así sucesivamente para otro valor cualquiera de n.

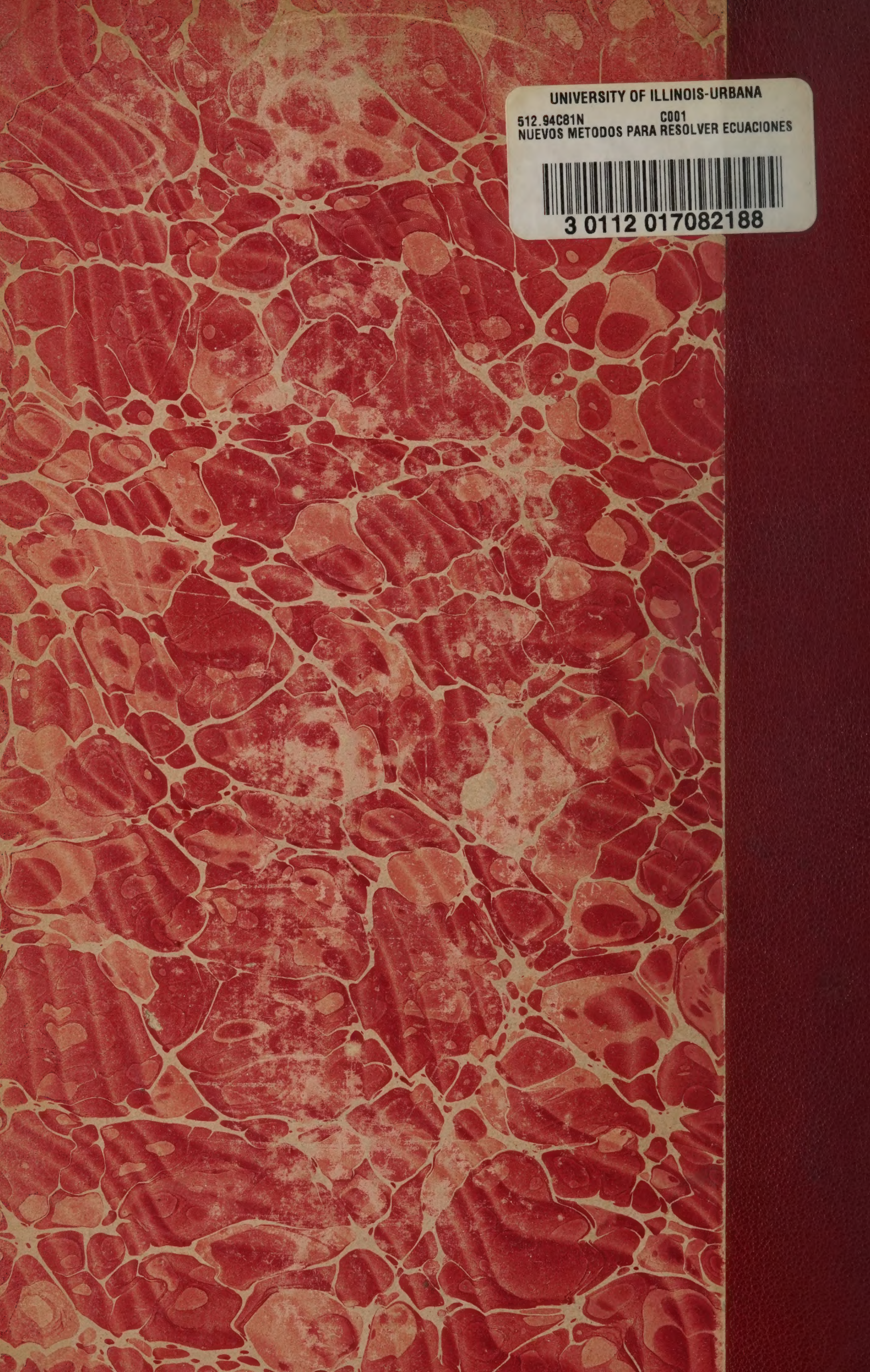
FIN

FE DE ERRATAS

Páginas.	Líneas.	Como dice.	Como debe decir.
4	4.ª	$f(Z) =$	$f(z) =$
10	3.ª	Superieur.	Superieure.
10	5.ª	$f(Z) =$	$f(z) =$
29	27	$y = u^{m-1}$	$y = u^{m}$
32	29	su (3)	en (3)






UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.94C81N C001
NUEVOS METODOS PARA RESOLVER ECUACIONES
3 0112 017082188